シュプリンガー現代理論物理学シリーズ 3

稲見武夫・川上則雄【編集】

SPRINGER-VERLAG TOKYO MODERN THEORETICAL PHYSICS SERIES

格子上の場の理論

青木慎也……著

丸善出版

本書の使い方

本書は格子上の場の理論に関する基礎的な教科書として書かれたものである．本書を理解するには場の量子論の基本的な知識を一通り習得していることが必要であり，大学院の修士1年の後半か修士2年の学生を念頭に書かれている．もちろん，他の分野を研究している方で格子理論のことを勉強したい人にも役立つ内容にしたつもりである．場の量子論以外では統計力学，特に臨界現象に関する知識があると本書の内容を理解する助けになるが，予備知識は本書の理解に必要不可欠なものではなく，なるべく本文を読むだけで理解できるように説明している．

本書は，第I部「格子理論：基礎編」と第II部「実践編：モンテカルロ法によるハドロン質量の計算」の2つに大きく分かれている．

第I部の基礎編は，文字通り格子理論の定義から始まってその基礎的な概念や特徴などを解説したものである．第1章は簡単な導入部であり，第2章でスカラー場を例にとって，格子理論の定式化と，格子理論において一番重要な概念である「連続極限」について説明している．ここでの「連続極限」は，定義的，形式的なものであるが，第3章では統計力学で活用されている「繰り込み群」という見方を使って，格子上のスカラー場の理論の「連続極限」をより直観的に理解できるように解説した．他の本を参照せずに繰り込み群の計算などを自分で確認したいという読者のために，具体的な繰り込み群の計算を付録Aに載せた．

第4章は格子理論がその有効性をもっとも発揮する場合である格子ゲージ理論についてその定義から詳しく解説する．しかし，本書は入門的な内容を

扱っているので，細かい応用などは省いて，格子ゲージ理論の特徴が読者に伝わるように工夫したつもりである．専門家の目から見ると不十分かもしれないが，初学者が膨大な情報に埋もれずに最短距離で格子ゲージ理論の本質を理解できるように意図している．巻末に文献を幾つか挙げておくのでより深く勉強したい方はそれらを参考にしていただきたい．

第5章から第8章までは格子上のフェルミオンを取り扱っており，他の標準的な教科書に比べて本書の特徴となっている部分である．第5章ではフェルミオンを格子上で定義する時の問題点を紹介する．フェルミオンを単純に格子化するとダブリングと呼ばれる余分な自由度が現れることを示し，格子上でカイラル対称性を保つ限りこの問題は避けられないことを証明したニールセン・二宮の定理を紹介する．そして，カイラル対称性やフレーバー対称性を破ることでダブリング問題を解決する方法として標準的によく使われているウィルソン・フェルミオンとKSフェルミオンの2つの定式化を紹介する．第6章ではクォーク場に対してウィルソン・フェルミオンを用いた場合の格子QCDの力学的な性質について詳しく議論する．この部分は筆者の研究分野の1つであり，他の教科書にはまったく見られないような内容も含まれている．また，ここで議論される性質の一部は第7章や第8章でも重要になる．第7章では新しい格子フェルミオンの方法として最近提唱されたドメインウォール・フェルミオンについて紹介する．この方法はカイラル対称性を保ちつつダブリングの問題を避けようとしたものであり，それをより明確に示したのが第8章で紹介するギンスパーグ・ウィルソン関係式である．ここに至って格子フェルミオンの問題はほぼ解決されたと言っても過言ではない．第7,8章の内容は現在も研究が進行中のホットな話題であり，教科書に載せるには時期尚早と考える向きもあるかもしれないが，非常に重要で面白い話題であるので，筆者の責任において将来に渡って残るような重要な内容のみを厳選して載せることにした．

第9章は第I部のまとめである．第II部は格子QCDの数値計算の実践編として「モンテカルロ法によるハドロン質量の計算」を紹介した．第10章ではモンテカルロ法によるハドロン質量の計算の中心になるハドロン相関関数の計算方法の基本的な一連の流れをまとめた．第11章はモンテカルロ計算の標準的な方法の1つである熱浴法の一般原理とその応用として熱浴法による

ゲージ場の生成法とを紹介する．第 12 章ではフェルミオンの (行列式の) 寄与を含んだゲージ配位の生成法であるハイブリット・モンテカルロ法の原理と実際の応用を紹介する．第 13 章では生成されたゲージ配位の元でクォークの伝搬関数を計算する方法を紹介する．これは大規模疎行列の逆行列を計算することとほぼ等価である．第 14 章ではクォーク伝搬関数を組み合わせて作られたハドロンの伝搬関数の「時間」依存性からハドロン質量を抜き出す方法を述べる．そのためには関数の「フィット」という操作が必要であるが，その方法は第 15 章にまとめる．そこではモンテカルロ法のような統計的平均操作において必要不可欠である誤差評価のやり方についても紹介する．第 16 章では上に述べた一連の手順によって得られたハドロン質量のクォーク質量に対する依存性から物理的なクォーク質量を決める方法を述べ，具体的な例を用いて実際にその方法を適用してみる．また，格子間隔依存性から格子間隔をゼロにする連続極限という操作を遂行するやり方をやはり具体例を使って示す．最後の第 17 章ではハドロン質量以外の物理量としてハドロンの行列要素の計算方法について簡単に触れる．そこではパイ中間子の崩壊定数を例として取り上げ，物理量の評価に必要な繰り込み定数の計算方法を含めて一連の操作を紹介する．

付録では，本文中で読みやすさ，理解の容易さのために触れられなかったが重要な点の幾つかをまとめて載せたので参考にして欲しい．

最後に不完全なものではあるが簡単な解説付の参考文献の一覧を載せる．

目 次

第 I 部　格子理論：基礎編　*1*

第 1 章　**格子上の場の理論とは？**　*3*

§1.0.1　格子上の場の理論の必要性 *3*

§1.0.2　格子 QCD とハドロン物理 *5*

第 2 章　**格子上の場の理論の連続極限**　*9*

§2.1　格子作用の決定方法 *9*

§2.2　コラム：古典的な作用の改良 *13*

§2.3　連続極限の定義 *13*

§2.4　$\lambda\phi^4$ 理論の相構造と連続極限 *18*

§2.5　コラム：有限体積効果 *22*

第 3 章　**繰り込み群と連続極限**　*25*

§3.1　繰り込み群とは？ *25*

§3.2　繰り込み群の具体的定義 *27*

§3.3　$\lambda\phi^4$ 理論に対する繰り込み変換 *30*

§3.3.1　$d > 4$ での繰り込み群の流れ *32*

§3.3.2　$d = 4$ での繰り込み群の流れ *34*

§3.3.3　$d < 4$ での繰り込み群の流れ *35*

§3.4　繰り込み群に基づいた連続極限の描像 *37*

§3.5 スカラー場の理論の連続極限の例 38
§3.5.1 4 次元の $\lambda\phi^4$ 理論 38
§3.5.2 $2 < d < 4$ 次元の $\lambda\phi^4$ 理論 40
§3.6 ユニバーサリティ（普遍性） 41

第 4 章 格子上のゲージ場の理論 43
§4.1 連続理論の QCD 43
§4.2 ゲージ場に対する格子作用 45
§4.2.1 ゲージ場とリンク変数 45
§4.2.2 格子作用 47
§4.2.3 経路積分 49
§4.3 エリッツァー (Elitzur) の定理と観測量 50
§4.3.1 エリッツァー (Elitzur) の定理 50
§4.3.2 ゲージ理論の観測量 I：ウィルソン・ループ 52
§4.3.3 ゲージ理論の観測量 II：グルーボール 54
§4.3.4 ゲージ理論の観測量 III：ポリャコフ・ループ 55
§4.4 強結合展開 (Strong Coupling Expansion) とクォークの閉じ込め 57
§4.4.1 SU(N) 群積分 57
§4.4.2 強結合展開 (Strong Coupling Expansion) とウィルソン・ループ 59
§4.4.3 キャラクター展開 63
§4.4.4 2 次元の格子ゲージ理論 64
§4.5 連続極限への近づき方（スケーリングの振る舞い） 67
§4.5.1 β 関数と格子間隔 67
§4.5.2 連続極限と閉じ込め 69

第 5 章 格子フェルミオン 71
§5.1 単純な格子化とダブラー 71
§5.1.1 単純な格子フェルミオン 71

§5.1.2 フェルミオン・ダブラー 71
§5.1.3 カイラル対称性 72
§5.1.4 ニールセン・二宮の定理 73
§5.1.5 ダブリング問題とアノマリー 77
§5.2 ダブリング問題の解決法 I：ウィルソン・フェルミオン . . 78
§5.2.1 ウィルソン項とダブラーの分離 78
§5.2.2 ウィルソン・フェルミオンとカイラル対称性 80
§5.2.3 ゼロでない a でのウィルソン・フェルミオンの質量 . 85
§5.3 ダブリング問題の解決法 II:KS フェルミオン 85
§5.3.1 KS フェルミオンの作用 86
§5.3.2 ディラック・フェルミオンへの書き換え 87
§5.3.3 ディラック場に対する作用 89

第 6 章 ウィルソン・フェルミオンを用いた格子 QCD の解析 93
§6.1 強結合展開とホッピング・パラメタ展開 93
§6.1.1 作用とファイマン規則 93
§6.1.2 真空期待値（1 点関数） 96
§6.1.3 2 点関数と中間子の質量 98
§6.2 有効ポテンシャルの方法を使った解析 102
§6.2.1 メソン場に対する有効ポテンシャルの定式化 102
§6.2.2 有効作用による真空の決定 105
§6.2.3 パイ中間子の質量の計算 108
§6.3 ウィルソン・フェルミオンを使った格子 QCD の相構造 . . 111
§6.3.1 ゼロ質量のパイ中間子と相転移 111
§6.3.2 ウィルソン・フェルミオンの相構造 116
§6.3.3 相転移の秩序変数とゼロ固有値 118

第 7 章 新しいフェルミオンの定式化：ドメインウォール・フェルミオン 121
§7.1 ドメインウォール・フェルミオンとは？ 122
§7.2 ドメインウォール・フェルミオンとカイラル対称性 125

§7.3 自由場におけるゼロモードの存在 129
§7.4 クォーク場と QCD 131
§7.5 ドメインウォール・フェルミオンの自由伝搬関数 134
§7.6 ウォード・高橋恒等式 136
§7.7 重いモードの取り扱い：パウリ・ビラース法 141

第8章 ギンスパーグ・ウィルソン関係式とカイラル対称性 143
§8.1 ギンスパーグ・ウィルソン関係式 143
§8.2 GW 関係式と“カイラル”対称性 145
§8.3 GW 関係式を満たす D の構成 147
§8.3.1 オーバーラップ演算子 147
§8.3.2 オーバーラップ演算子の局所性 149
§8.4 ドメインウォール・フェルミオンとオーバーラップ・フェルミオンの関係 152
§8.5 ギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすディラック演算子の指数定理 156
§8.5.1 指数定理 156
§8.5.2 D の固有値と $\gamma_5 D$ の固有値 157
§8.5.3 指数定理の証明 161

第9章 第I部のまとめ 163

第II部 実践編：モンテカルロ法によるハドロン質量の計算 165

第10章 基本的な手順 169
§10.1 経路積分の表式 169
§10.2 計算の手順 171

第11章 ゲージ場 U の生成（モンテカルロ法） 173

§11.1 クエンチ QCD に対する熱浴法 *173*
§11.1.1 熱浴法の原理 *173*
§11.2 SU(2) 格子ゲージ理論の熱浴法 *174*
§11.2.1 過緩和法 *176*
§11.2.2 SU(3) ゲージ場 *177*

第 12 章 **確率過程とモンテカルロ計算法** ***179***
§12.1 確率過程の基礎と詳細釣り合いの原理 *179*
§12.2 ハイブリッド・モンテカルロ (Hybrid Monte Carlo) 法 . . *184*
§12.2.1 HMC 法での詳細釣り合い証明 *186*
§12.3 QCD に対する HMC 法 *188*
§12.4 奇数個のクォークが存在する場合の計算法 *191*

第 13 章 **クォーク伝搬関数** ***195***
§13.1 クォークの伝搬関数 $((D^{-1})^{AB}_{xy,\alpha\beta})$ の計算法 *195*
§13.1.1 傾斜法 *195*
§13.1.2 共役傾斜法 (Conjugate Gradient method) *196*
§13.1.3 CG 法のアルゴリズム *199*
§13.2 ウィルソン・フェルミオンに対する前処理 *201*
§13.3 $(D^\dagger D)^{-1}$ の計算アルゴリズム *202*

第 14 章 **ハドロン質量の評価法** ***205***
§14.1 伝搬関数の形 *205*
§14.2 有効質量 *211*
§14.3 ハドロン演算子の改良 *213*
§14.4 フィット（最適化） *214*

第 15 章 **フィットと誤差解析** ***217***
§15.1 統計誤差と誤差伝搬 *217*

§15.2 ジャック・ナイフ法 217
§15.3 フィット 219
§15.4 相関を取り入れたフィット 219
§15.5 自己相関 (Auto-correlation) 220
§15.6 ジャック・ナイフ法と自己相関 222

第 16 章 ハドロン質量のクォーク質量依存性および連続極限 223

§16.1 ハドロン質量のクォーク質量依存性 224
§16.1.1 π 中間子 224
§16.1.2 その他のハドロンのクォーク質量依存性 226
§16.1.3 核子の質量の m_l への外挿 227
§16.2 核子の質量の連続極限 228

第 17 章 パイ中間子の崩壊定数の計算 231

§17.1 格子上での崩壊定数の計算 231
§17.2 軸性ベクトル・カレントの繰り込み 232
§17.2.1 連続理論 232
§17.2.2 格子理論 236
§17.2.3 連続理論と格子理論の間の繰り込み定数 240
§17.3 繰り込まれた崩壊定数の計算 240

付録 A d 次元 $\lambda\phi^4$ 理論の繰り込み変換の計算 246

付録 B 長方形のループを含む格子ゲージ理論の作用の連続極限 255

付録 C Elitzur の定理 258

付録 D ウィルソン・フェルミオンによるカイラル・アノマリーの計算 261

付録 E $N \to \infty$ での SU(N) 積分 *269*

付録 F 格子 Gross-Neveu 模型の解析 *271*

付録 G ドメインウォール・フェルミオンの伝搬関数の計算 *277*

付録 H ドメインウォール・フェルミオンに対するウォード・高橋恒等式の導出 *282*

付録 I ドメインウォール・フェルミオンを用いた overlap 演算子の導出 *284*

付録 J GW 関係式を満たす演算子の固有値と固有関数 *292*

§J.1 基本的な性質 *292*
§J.2 $H^2 = D^\dagger D$ の固有値と固有関数 *294*
§J.3 $H = \gamma_5 D$ の固有値と固有関数 *296*
§J.4 固有値，固有関数の分類と相互の関係 *297*

付録 K ゲージ固定の計算方法 *301*

§K.1 ゲージ固定条件 *301*
§K.2 SU(2) 部分群による解法 *302*
§K.3 最速下降法 *303*

付録 L 参考文献 *305*

§L.1 場の理論や格子場の理論の教科書など *305*
§L.2 各章の参考文献:第 I 部 *307*
§L.3 各章の参考文献:第 II 部 *311*
§L.4 付録の内容の参考文献 *312*

索 引 *318*

第I部

格子理論：基礎編

第 1 章

格子上の場の理論とは？

§1.0.1　格子上の場の理論の必要性

まず始めに，格子上の場の理論とは何を目的とした理論であるかを説明しておこう．

素粒子物理学においてはその理論を記述する枠組み，言い換えると素粒子理論に於ける“言語”は，相対論的場の量子論（以下では単に場の量子論，あるいは場の理論と呼ぶ）である．本書の読者は場の量子論の基礎を習得していることが望ましいが，そうでない場合は巻末に挙げた場の理論の参考書の中の基礎的な部分を読んで欲しい．

場の量子論は，無限自由度の量子力学と等価である．しかしながら，場の量子論は数学的に厳密に定義された理論体系とは言い難い．それは，場の理論が扱っている自由度の数が「非可算」無限大であり，通常の量子力学での粒子数を単純に無限個（これは明らかに可算無限である）にしたものではないからである．通常の場の理論の教科書では，最初に相互作用のない理論，つまり自由場の理論を取り扱う．自由場の場合は厳密に解けるので数学的定義に問題はない．粒子の生成，消滅が可能な理論，つまり，相互作用がある場合は，（ほとんどの場合）厳密に解くことができないので，通常は摂動論を用いて相互作用の次数による摂動展開でいろいろな計算を行う．教科書では，正しい定義があってそれを近似的に摂動展開で計算しているように書かれているものが多いが，正しくは「摂動展開によって場の量子論を定義している」というのが本当のところである．そのような原理的な問題はさておいても，場の理論で摂動計算を行なうといろいろな問題が生じてくる．摂動展開を定義どお

りに計算すると自由度が無限大であることに起因して無限大の答えが現われてしまう．この無限大は，粒子の運動量が無限大になる領域からの寄与が原因であるので,「紫外発散」と呼ばれている．この無限大の困難を回避し，物理量に対する「有限な」答えを得るためには「繰り込み」(renormalization) という操作が必要になってくる．そして，その繰り込みを定義するには紫外発散がどのような無限大であるかを知らなければならず，そのために「正則化」という新たな操作も必要になる．さらに，ゲージ場の場合，ゲージ対称性のためにゲージ自由度に付随する新たな発散が現われてしまう．それを取り除くために摂動論では「ゲージ固定」という操作が必要になり，そのためにゲージ対称性が明白ではなくなってしまう．

このような摂動論における問題点を意識して場の量子論を数学的により厳密に取り扱う理論体系が「格子上の場の理論」である．格子上の場の理論は，連続時空ではなく 間隔 a の格子上に「場の理論」を定義するものである．格子上の場の理論の自由度は可算無限であり，運動量の最大値が π/a に押さえられるので紫外発散も現われない．つまり，格子によって正則化を導入したと考えることができる．もちろん，時空は連続であるので，最後に $a \to 0$ という極限（連続極限と呼ぶ）をとらなければならない．

格子上の場の理論から連続時空上の場の理論の結果を導く手順は以下の通りである．格子を有限体積にすることで，有限自由度の量子力学と等価になり，理論が数学的に厳密に定義されその取り扱いが扱い簡単になる．次に，体積無限大の極限を考える．これは統計力学における「熱力学的極限」と等価で，やはり数学的な問題点が少ない操作である．最後に，有限の a を $a \to 0$ に外挿することで，連続時空上の場の量子論が定義される．このように，格子上の場の理論を使って「連続時空の場の量子論」を厳密に定義することは「構成論的場の量子論」の方法と呼ばれ，多くの研究がある．本書では構成論的場の量子論についてはこれ以上触れないが，興味のある読者は文献 [13] を参照していただきたい．

数学的な厳密性の詳細は必要ではないが，大事な点は，格子上の場の理論は（今のところ）場の量子論を厳密に定義する唯一の方法であり，定義に摂動展開を使う必要がないことである．そのため，強結合展開や弱結合展開，モンテカルロ法によるシュミレーションなどいろいろな (近似的) 計算方法が適

用できる．本書では（背後にある厳密性に基づいた）格子上の場の理論の有用性に焦点をあって解説をしていきたい．

最後になるが，格子理論は（d 次元）ユークリッド空間内の格子上に定義されるので，連続極限で実現されるのは連続なユークリッド空間の場の量子論である．ユークリッド空間の理論とミンコフスキー空間の理論の関係はよく知られているので，本書では必要のないがぎりその点には触れない．また，量子化の方法としては主として経路積分の方法を用いる．

§1.0.2　格子 QCD とハドロン物理

次章以降で格子上の場の理論の具体的な定式化に入るわけであるが，その前に格子上の場の理論の主要なターゲットである量子色力学 (Quantum ChromoDynamics, 以下では QCD と呼ぶ) と強い相互作用について簡単にまとめておく．ここでは詳しい説明無しに知られている事実だけを紹介するので，初学者の方は気楽に読み流していただいて構わない．また，格子 QCD がどのような問題に応用できるか，格子 QCD の代表的な結果なども簡単に紹介することにする．

強い相互作用をする粒子はハドロンと呼ばれ，陽子や中性子などのバリオンと π 中間子や K 中間子などのメソンの存在が知られている．実験的に数百種類のハドロンが確認されており，その種類の多さから「素粒子」であるとは考えられず，そのためハドロンの構成要素としてクォークが導入された．クォークは分数電荷を持ち，3 つのクォークの束縛状態がバリオン，クォークと反クォークの束縛状態がメソンと考えられている．現在，up, down, strange, charm, bottom, top という 6 種類のクォークの存在が知られている．(これらクォークの種類のことをフレーバーと呼ぶ．) ハドロンの強い相互作用では，強い相互作用の典型的なエネルギーである 1 GeV に比べてその質量が軽い up, down, strange の 3 つのクォークを考える場合が多い．クォークを束縛させる相互作用は量子色力学 (QCD) と呼ばれる SU(3) 非可換ゲージ理論である．クォークの持つ 3 つのカラー自由度をゲージ化したものであるためこのような名前がついている．

QCD は高エネルギーでは相互作用がどんどん弱くなりクォークは自由場

のように振舞う (漸近的自由性) が低エネルギーでは相互作用が強くなりハドロンに束縛されたクォークは単独では外に現われない (クォークの閉じ込め), という両極端な性質を持っている．クォークの高エネルギー散乱などでは相互作用が弱くなり量子電磁力学などで成功を収めて来た摂動展開の手法が使えるが, (1 GeV かそれ以下の) 低エネルギーでは非摂動効果が重要になり摂動展開は破綻すると考えられる．特にクォークの束縛状態としてハドロンができることやクォークの閉じ込めなどの理解には非摂動的な手法が必要であり, 格子 QCD はそのような要求から誕生した．

格子 QCD などの成立以前は具体的に計算せずに対称性などから理論の性質を理解することが行われ成功を収めてきた．QCD の相互作用はクォークの種類に依らないので, up,down,strange の質量が等しい極限では SU(3) フレーバー対称性がある．近似的フレーバー対称性を使った群論的な解析でハドロンの質量公式や散乱振幅などの性質を良く説明できることが知られている．また, QCD の相互作用はパリティを保存し 3 つのクォーク質量がゼロの極限で SU(3) カイラル対称性を持つ．このカイラル対称性は QCD の力学的効果で「自発的に」破れることが予想されている．「南部・ゴールドストンの定理」によると, 連続対称性が自発的に破れると破れた自由度の数だけのゼロ質量の粒子 (南部・ゴールドストン粒子) が現われるはずだが, 実際はゼロでないクォーク質量のために対称性は近似的であり, この場合はクォーク質量の１／２乗に比例した質量を得る．π 中間子などの擬スカラー中間子をカイラル対称性の破れで現われる近似的な南部・ゴールドストン粒子であると考えることで, QCD の典型的なエネルギースケールよりかなり小さい擬スカラー中間子の質量が理解できる．

格子 QCD を使って定量的に議論できる課題 (の一部) を以下に挙げよう．

1. ハドロンの質量の計算．バリオンやメソンはクォークの束縛状態であるのでその質量は摂動展開では計算できない．したがって QCD からハドロンの質量を計算するには格子 QCD のような非摂動論的計算方法が必要である．本書の後半で述べるモンテカルロ法による数値シミュレーションの方法によって格子 QCD でハドロンの質量を計算することができる．

計算結果を実験値と比べることで，QCD の正しさを実証することも出来る．質量だけでなくハドロンの散乱や崩壊現象を理論的に研究することも可能になる．

2. クォークの閉じ込め．この現象も本質的に非摂動的であり，格子 QCD によって定性的，さらに定量的にも理解できる．
3. カイラル対称性の自発的破れ．QCD で実際にカイラル対称性の自発的破れが起こることを示すのは重要であり，格子 QCD の課題の 1 つである．また，パイオンなど擬スカラー中間子が南部・ゴールドストーン粒子であることを確認することも出来る．
4. 新粒子の予言．QCD において，クォーク 3 つで構成されるバリオンやクォーク・反クォークで構成されるメソン以外の粒子が存在する可能性を研究するこては重要である．たとえば，クォーク 4 つと反クォーク 1 つからなるペンタクォークの存在は実験で盛んに調べられており，格子 QCD で理論的な予言 (存在するかどうか，存在するとしたらその質量はどれくらいか，など) をすることは可能である．また，クォークを含まないグルーオン (カラーゲージ場) だけからなるグルーボールの存在も格子 QCD で予言され，その質量や崩壊幅なども計算されている．
5. 有限温度での相転移．QCD で温度を上げていくとクォークが閉じ込められたハドロン相から閉じ込めが破れたクォーク・グルーオン・プラズマ相へ相転移を起こすと考えられている．実際，格子 QCD を使って数値計算で相転移の存在が確かめられ，転移温度や状態方程式などが計算されている．
6. ハドロンの行列要素の計算．弱い相互作用や電磁相互作用ではクォークを考えた摂動展開は有効であるが，クォークは強い相互作用をしてハドロンに束縛されているため，その効果を取り入れないと，実験との比較などができない．格子 QCD では弱電磁相互作用の計算であらわれる行列要素をハドロン状態に対して計算することが可能になり，標準理論の検証やそれを越えた未知の現象の探索に寄与している．

ここで述べたこと以外にもいろいろな応用が考えられるが，これ以上は取り上げず，次章から格子理論を説明を開始する．

第 2 章

格子上の場の理論の連続極限

この章では，格子上の場の理論とはどのようなもので，連続極限はどのように実現されるかを，$\lambda\phi^4$ 理論と呼ばれる 4 点相互作用をする 4 次元のスカラー場の理論を例に用いて解説していく．

§2.1　格子作用の決定方法

最初に連続理論の作用から格子作用を決めることを考えよう．

連続理論の $\lambda\phi^4$ 理論の作用は

$$S_{cont.} \;=\; \int d^4x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right] \qquad (2.1.1)$$

で与えられる． ここで ϕ はスカラー場，m はその質量，λ は 4 点相互作用の結合定数である．また，ここでは，繰り返してあらわれた添字に関しては和を取るというアインシュタインの既約を用いている．つまり，

$$\partial_\mu\phi\partial_\mu\phi = \sum_{\mu=1}^{4}(\partial_\mu\phi)^2$$

である.（ユークリッド空間なので添字の上附き，下附きは区別しない.）また，$\partial_\mu \equiv \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ と略記している．

次に，連続時空の代わりに格子空間を考えよう．図 2.1 は 2 次元格子の例である．ここで，a は格子間隔であり，整数のベクトル $n=(n_0,n_1)$（4 次元では $n=(n_0,n_1,n_2,n_3)$）を用いると時空上の格子点は $x=na$ とあらわされる．また，$\hat{\mu}$ は μ 方向の単位ベクトルで，x の μ 方向の隣の点は $(n+\hat{\mu})a$

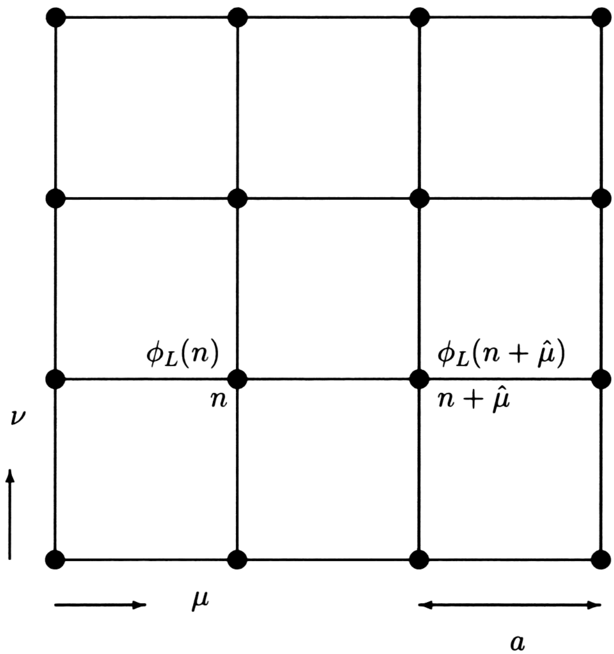


図 2.1： (2 次元) 格子の模式図. a は格子間隔である. $\phi_L(n)$ は格子点のみに定義される.

になる.

さて，格子上の作用 $S_{lat.}$ を決める「指導原理」を次のように与える.

1. $a=0$ の極限で格子作用は連続の作用に一致する. つまり，

$$\lim_{a\to 0} S_{lat.} = S_{cont.}$$

2. $S_{lat.}$ は $S_{cont.}$ と (なるべく) 同じ対称性を持つものを取る. なるべくというのは必ずしも連続理論の対称性を格子上で保てるわけではないからで，例えばローレンツ対称性 (ユークリッド空間では回転対称性) は格子上では保てない. また，平行移動不変性も同様である. しかしながら，回転対称性に対応して格子軸の入れ換えの対称性がありこれは 90 度回転

に等しい．また，格子間隔 a の平行移動なら保つことができる．連続極限では空間対称性や平行移動不変性は回復すると期待されるが，実際にそれを示すことは重要である．

上の原理だけでは格子作用は 1 つには決まらないが，いちばん簡単な作用は次のようになる．

$$\begin{aligned} S_{lat.} &= a^4 \sum_n \left[-\frac{1}{2}\phi(na) \sum_\mu \frac{\phi(na+\hat{\mu}a)+\phi(na-\hat{\mu}a)-2\phi(na)}{a^2} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}m^2\phi(na)^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi(na)^4 \right] \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

スカラー場 ϕ は格子点 $x = na$ のみに定義されていることに注意して欲しい．

上の作用が「指導原理 1」を満たすことを確かめてみる．

$$\phi(na \pm \hat{\mu}a) = \phi(na) \pm a\partial_\mu\phi(na) + \frac{a^2}{2}\partial_\mu^2\phi(na) \pm \frac{a^3}{3!}\partial_\mu^3\phi(na) + O(a^4)$$

でいう関係式から，差分と微分の違いを評価すると，

$$\begin{aligned} S_{lat.} &= a^4 \sum_n \left[-\frac{1}{2}\phi(na)\partial_\mu^2\phi(na) + \frac{1}{2}m\phi(na)^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi(na)^4 \right] \\ &+ O(a^2) \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

となる．ここで，積分の台形公式による近似

$$\begin{aligned} \int_0^L dxf(x) &= a\sum_{n=1}^{L/a} f((n-\frac{1}{2})a) + O(a^2) \\ &= a\sum_{n=0}^{L/a-1} f(na) + \frac{1}{2}a(f(L)-f(0)) + O(a^2) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

を用いると，

$$S_{lat.} = S_{cont.} + O(a^k) \tag{2.1.5}$$

となり，条件 $\lim_{a\to 0} S_{lat.} = S_{cont.}$ が満たされていることがわかる．ここで，一般の境界条件では $k=1$，周期的境界条件などのように $f(L)-f(0)=0$ となる場合は $k=2$ である．

次に「指導原理 2」について考える．連続理論は $\phi \to \phi' = -\phi$ という Z_2

変換に対して不変である．そのため，繰り込み可能な相互作用である ϕ^3 の項が作用には現われなかった．格子の作用に同じ対称性を要請すると ϕ^3 の項だけでなく $\phi^{2n+3}(n = 1, 2, \cdots)$ という項が禁止される．これらの項は次元から $O(a^{2n-1})$ であり，「指導原理 1」からは禁止できない．

格子間隔 a が次元をもっていることを用いて，格子の作用 $S_{lat.}$ をすべて次元のない量を用いて書き表すことができる．

$$\phi_L(n) \equiv a\phi(na) \tag{2.1.6}$$

$$M \equiv ma \tag{2.1.7}$$

と無次元量を定義すると，格子作用は

$$\begin{aligned} S_{lat.} &= \sum_n \left[-\frac{1}{2}\phi_L(n) \sum_\mu \{\phi_L(n+\hat{\mu}) + \phi_L(n-\hat{\mu}) - 2\phi_L(n)\} \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2}M^2\phi_L(n)^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_L(n)^4 \right] \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

というようにすべて無次元の量で書くことができ，どこにも格子間隔 a が現われない．次に，このような無次元の作用で決まる理論からどのように a を決定し，連続極限を定義するかを議論する．

ここで ϕ_L^k という項が作用の中で a^{k-4} という次元を持っていることを示そう．この項の作用への寄与は

$$\lambda_k \sum_n \phi_L(n)^k \tag{2.1.9}$$

と書けるはずだから，次元 a を復活させて $a \to 0$ とすると

$$\lambda_k a^{k-4} a^4 \sum_n \phi(na)^k \to \lambda_k a^{k-4} \int d^4x \phi(x)^k \tag{2.1.10}$$

となるので，確かに次元 a^{k-4} となっていることがわかる．したがって，$k > 4$ という 4 次元では繰り込み不可能になっている相互作用は格子理論では連続極限を取ると作用の中から自動的に消えてしまう．つまり，そのような項を格子作用にいくら付け加えても「指導原理 1」には抵触しない．

§2.2 コラム：古典的な作用の改良

§2.1 で見てきたように，周期的な境界条件を用いると，格子作用と連続の作用のずれは $O(a^2)$ であり，そのずれは格子の差分項から来る．したがって，格子作用に現われる 2 階差分

$$\begin{aligned}\nabla^2_\mu \phi(na) &\equiv \frac{\phi(na+\hat{\mu}a)+\phi(na-\hat{\mu}a)-2\phi(na)}{a^2} \\ &= \partial^2_\mu \phi + a^2 \frac{2}{4!}\partial^4 \phi + O(a^4)\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

を次のような「改良された (improved)2 階差分」

$$(\nabla^{\rm imp}_\mu)^2 \phi(na) \equiv \nabla^2_\mu \phi(na) - a^2 \frac{2}{4!}(\nabla^2_\mu)^2 \phi(na) = \partial^2_\mu \phi + O(a^4) \tag{2.2.2}$$

に置き換えると，格子作用と連続作用のずれは $O(a^4)$ となり，改良された 2 階差分を用いた作用は（$a<1$ なら）前の作用より連続極限に近いといえる．ここで ∇^2_μ の定義を繰り返し使うと

$$\begin{aligned}(\nabla^2_\mu)^2 \phi(na) &= \frac{1}{a^4}\left[\phi(na+2\mu a)+\phi(na-2\mu a)-2\phi(na)\right. \\ &\quad \left. -4\{\phi(na+\mu a)+\phi(na-\mu a)-2\phi(na)\}\right] \\ &= \frac{(\nabla^2_{2\mu}-4\nabla^2_\mu)\phi(na)}{a^2}\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

であるから，格子上の差分演算子 ∇^2_μ と $\nabla^2_{2\mu}$ を用いて，改良された 2 階差分を

$$(\nabla^{\rm imp}_\mu)^2 = \frac{4}{3}\nabla^2_\mu - \frac{1}{12}\nabla^2_{2\mu} \tag{2.2.4}$$

と書くことができる．このように格子作用の任意性を使い，より連続極限に近い格子に変更することを古典的な作用の改良 (improvement) という．ここで「古典的」という言葉がつくのは，作用の改良のみを考えているからて，経路積分を実行したことによる量子効果に起因する $O(a^2)$ のずれは改良されずに残っているからである．

§2.3 連続極限の定義

ここでは，作用だけの連続極限ではなく，量子効果を含めた上で理論の連

続極限を決めていくことにする．そのために次式で定義される粒子の伝搬関数（あるいは場の演算子の2点関数）を考える．

$$\langle 0|\hat{\phi}(n)\hat{\phi}(m)|0\rangle = Z^{-1}\int\left[\prod_l d\,\phi(l)\right]\ \phi(n)\phi(m)\ \exp[-S_{lat.}] \quad (2.3.1)$$

ここで，$\hat{\phi}$ は場の演算子であり，Z は理論の分配関数で

$$Z \quad = \quad \int\left[\prod_l d\,\phi(l)\right]\exp[-S_{lat.}] \quad (2.3.2)$$

と与えられる．また，$|0\rangle$ は系の基底状態（真空）である．式 (2.3.1) の右辺は，

$$\hat{\phi}(n)|\phi\rangle \quad = \quad \phi(n)|\phi\rangle \quad (2.3.3)$$

を満たす状態 $|\phi\rangle$ を使って，左辺の2点関数を経路積分で表したものである．必要のない限り，格子上の場を表わす添字 L は省略することにする．

さて，式 (2.3.1) の左辺を別のやり方で評価するために，完全系を使って以下のような「1の分解」を考える．

$$1 \quad = \quad |0\rangle\langle 0| + \sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}|E_k(\vec{p})\rangle\langle E_k(\vec{p})|\frac{1}{2E_k(\vec{p})} + \cdots \quad (2.3.4)$$

ここで，$|E_k(\vec{p})\rangle$ は運動量 $\vec{p}$，エネルギー $E_k(\vec{p})$ を持つ1粒子状態で，k はそのような1粒子状態が複数個あった場合にそれらを区別する添字である．また，$+\cdots$ は2粒子以上の状態の寄与を表す．また，$|E_k(\vec{p})\rangle$ は

$$\langle E_k(\vec{p})|E_l(\vec{q})\rangle = 2E_k(\vec{p})\delta_{k,l}\delta^{(3)}(p-q)(2\pi)^3 \quad (2.3.5)$$

という規格化条件を満たす．ここでは全ての量を無次元で書いている．

計算を進める前に，有限格子間隔，有限体積の場合に，運動量や座標の「積分」の意味を見てみよう．簡単のために1次元の場合を考えると，連続理論の δ 関数の定義から

$$\int dp\int dx\frac{e^{ip\cdot x}}{2\pi} = \int dp\delta(p) = 1 \quad (2.3.6)$$

であるが，これを有限格子間隔，有限体積にすると積分は和になるので，格子間隔 a を使い次元を復活して $p = 2\pi k/(N_s a)$（ただし，k は整数）とすると，

$$\frac{2\pi}{N_s a}\sum_{k=0}^{N_s-1} a \sum_{n=0}^{N_s-1} \frac{e^{ip\cdot na}}{2\pi} = \frac{1}{N_s}\sum_{k=0}^{N_s-1} N_s \delta_{k,0} = 1 \tag{2.3.7}$$

と計算される．このように積分を和に置き換える場合でも正しい結果を与えるので，置き換えの際にはここで使った定義を用いればよい．

さて，式 (2.3.1) の左辺に 1 の分解 (2.3.4) を代入すると，

$$\begin{aligned} & \langle 0|\hat{\phi}(n)|0\rangle\langle 0|\hat{\phi}(m)|0\rangle \\ + & \sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_k(\vec{p})}\langle 0|\hat{\phi}(n)|E_k(\vec{p})\rangle\langle E_k(\vec{p})|\hat{\phi}(m)|0\rangle + \cdots \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

となるが，ここで (無次元化した) エネルギー運動量演算子 $\hat{p}$ を用いて $\hat{\phi}(n) = e^{-i\hat{p}\cdot n}\hat{\phi}(0)e^{i\hat{p}\cdot n}$ （ただし，$n=(n_0,\vec{n})$）と書けることを使うと，

$$\begin{aligned} = & \quad \langle 0|\hat{\phi}(0)|0\rangle^2 + \sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2E_k(\vec{p})} e^{i\vec{p}\cdot(\vec{n}-\vec{m})} e^{-E_k(\vec{p})(n_0-m_0)} \\ \times & \quad |\langle 0|\hat{\phi}(0)|E_k(\vec{p})\rangle|^2 + \cdots \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

となる．(4 次元運動量は $p=(iE_k(\vec{p}),\vec{p})$ であることを使った．) ここで,「空間座標」$\vec{n}$ あるいは $\vec{m}$ に関して和を取ってゼロ運動量状態のみを考えることにする．この時，連結な (connected) 伝搬関数を

$$\langle 0|\hat{\phi}(n)\hat{\phi}(m)|0\rangle_c \equiv \langle 0|\hat{\phi}(n)\hat{\phi}(m)|0\rangle - \langle 0|\hat{\phi}(n)|0\rangle\cdot\langle 0|\hat{\phi}(m)|0\rangle \tag{2.3.10}$$

と定義すると

$$\sum_{\vec{n}}\langle 0|\hat{\phi}(n)\hat{\phi}(m)|0\rangle_c = \sum_k \frac{1}{2M_k} e^{-M_k|n_0-m_0|}|Z_k|^2 + \cdots \tag{2.3.11}$$

となる．ここで，$M_k = E_k(\vec{p}=0)$ は k 番目の 1 粒子状態の質量，

$$Z_k \quad = \quad \langle 0|\hat{\phi}(0)|M_k\rangle \tag{2.3.12}$$

は，そのような 1 粒子状態 k が $\hat{\phi}$ によって真空から生成される割合を表す．

2 つの場を「時間的に」十分引き離す (つまり，n_0-m_0 を充分大きく取る) と，

$$\begin{aligned} \lim_{|n_0-m_0|\to\infty}\sum_{\vec{n}}\langle\phi(n_0,\vec{n})\phi(m_0,\vec{m})\rangle_c \quad \simeq & \quad \frac{|Z_0|^2}{2M_0}\exp[-M_0|n_0-m_0|] \\ \times & \quad \left[1+O(e^{-\Delta M_0|n_0-m_0|})\right] \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

と振る舞う．ここで，M_0 は一番軽い（1粒子状態の）質量で，$\Delta M_k \equiv M_k - M_0$ はそれ以外の粒子の質量との差である．

格子理論の伝搬関数は，統計力学では相関関数とよばれ，やはり，$n_0 - m_0$ が大きい極限では

$$\simeq C \exp[-|n_0 - m_0|/\xi] \tag{2.3.14}$$

と振る舞う．ここで，ξ は相関距離と呼ばれる量で，場 ϕ が影響を及ぼす（つまり，相関している）平均の距離を示している．両者を比較すると

$$M_0 \;=\; m_{\text{phy}} a \simeq 1/\xi \tag{2.3.15}$$

であることがわかる．ここで，m_{phy} は次元を持った粒子の質量，a は格子間隔である．したがって，$a \to 0$ の連続極限では

$$\lim_{a\to 0} \xi(a) \;=\; \lim_{a\to 0} \frac{1}{m_{\text{phy}} a} \to \infty \tag{2.3.16}$$

となり，相関距離が発散することがわかる．言い換えると，相関距離が発散するところで連続極限を定義することができるわけだ．統計力学では相関距離が発散する点は系が2次（以上）の相転移を起こすところであるから，標語的に言うと「格子理論の連続極限は系のパラメタを調整して2次（以上）の相転移を起こす点に近づけることで実現される.」ということである．このように連続極限をとれば，粒子の相関関数は (a の適当なベキを除いて)

$$\sim \;\; \frac{|Z_0|^2}{2m_{\text{phy}}} \exp[-m_{\text{phy}} t] \tag{2.3.17}$$

となり連続理論の結果を再現する．ただし，$t = |n_0 - m_0|a$ は（ユークリッド空間での）次元を持った「時間」である．

「無次元の作用からどのように格子間隔 a が現れるのか？」という前節の疑問は以下のように解消される．上で定義した相関距離 ξ は空間で ξ 程度離れた2点上での物理量（今の場合はスカラー場 ϕ）が「相関」していることを意味する．相関するとは，ある点での場の値が（ξ 程度離れた）もう1つの点での場の値と関係がある，ということである．相関距離は格子間隔 a で計っていくつ分ということができる．相関距離が「長く」なればより多くの格子点が「相関」してくる．さて，ここで考え方を逆にしよう．1つの物理系を考

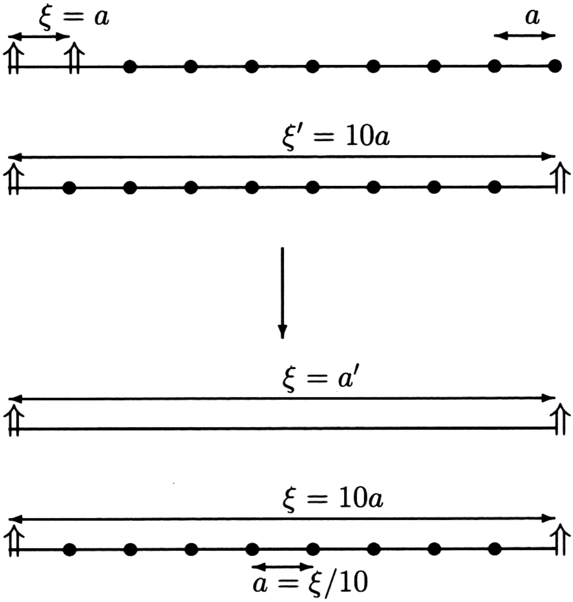


図 2.2：上の 2 つの図は，格子間隔 a を基準に相関距離を測った場合で，$\xi = a$（1 番上）と $\xi = 10a$（2 番目）の時を模式的に表したもの．上向きの矢印はスピンで ξ 程度離れたスピンは互いに相関している．相関距離 ξ は物理的に意味のある量なので，それを基準に長さを計ったのが下の 2 つの図である．3 番目の図は格子間隔が $a' = \xi$ の場合で，4 番目は $a = \xi/10$ の場合である．相関距離が格子間隔で計って長くなればなるほど，物理的な格子間隔は短くなる．したがって，$a \to 0$ の連続極限は $\xi = \infty$ に対応する．

えた時，相関距離は物理的に決まっているはずである．それを例えば 0.1cm としよう．相関距離が格子間隔で考えて a であれば，a =0.1cm である．相関距離が格子間隔に対して長くなり，例えば $10a$ になると，a =0.01cm と格子間隔が物理的な長さで考えて短くなったことになる．つまり，相関距離が格子間隔で計って長くなれば，格子間隔が短くなるわけだ.（図 2.2 を参照.）したがって，連続極限は相関距離が無限大になる場合であり，相関距離が無限大になるのは統計力学系で 2 次（以上）の相転移が起こるところである．つまり，連続極限は系のパラメタを調整して 2 次相転移点に近づけることで実現されるわけである．

連続極限での理論の性質を知るには格子作用で定義される理論の力学的構造を解き相転移点近傍の系の性質，つまり，系の相構造，を調べなくてはならない．次節では $\lambda\phi^4$ の場合の相構造と連続極限の関係について考察する．

§2.4　$\lambda\phi^4$ 理論の相構造と連続極限

$\lambda\phi^4$ 理論の場合，相関距離 ξ が発散するのは (M^2, λ) のパラメタ空間内での相転移線上である．ここで，M^2, λ は作用 (2.1.8) に現われるパラメタである．さて，実際に相転移線がどこにあるかを見てみよう．まずはじめに（量子効果を無視して）古典的に考える．場 ϕ に対する古典的なポテンシャルは

$$V(\phi) \quad = \quad \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 + \frac{3!M^2}{\lambda})^2 - \frac{3!}{4\lambda}M^4 \tag{2.4.1}$$

で与えられるから，以下の3つの状況が考えられる．

1. $M^2 > 0$ の場合．このとき，ポテンシャルの最低点は $\phi = 0$ であるから，ϕ の真空期待値がゼロになる．(図 2.3：上）つまり，

$$\langle\phi\rangle \quad = \quad 0 \tag{2.4.2}$$

   である．この時，系は Z_2 対称性が保たれた相（対称相）にあるという．
2. $M^2 < 0$ の場合．このとき，ポテンシャルの最低点は $\phi^2 = -\dfrac{3!M^2}{\lambda}$ であるから，どちらか一方を選べば，

$$\langle\phi\rangle \quad = \quad \pm\sqrt{\frac{3!M^2}{\lambda}} \neq 0 \tag{2.4.3}$$

   となる．(図 2.3：下）つまり，系は Z_2 対称性が真空によって自発的に破れた相にある．
3. 2つの相の境界，つまり，$M^2 = 0$ の場合．このとき，$\langle\phi\rangle = 0$ であるが，同時に $M_\phi = 0$ となり，場 ϕ の質量がゼロになっている．($M^2 \neq 0$ である限り $M_\phi^2 \neq 0$ であるから，前の2つの場合は質量はゼロでない．）このようにゼロ質量が現れるので相関距離は発散する（$\xi \sim 1/M_\phi$）．系は臨界にあるといい，$(M^2 = 0, \lambda)$ が相転移線である．(図 2.3：中）

上の結果は古典的なものであり，かなりおおざっぱではあるが，相転移が現

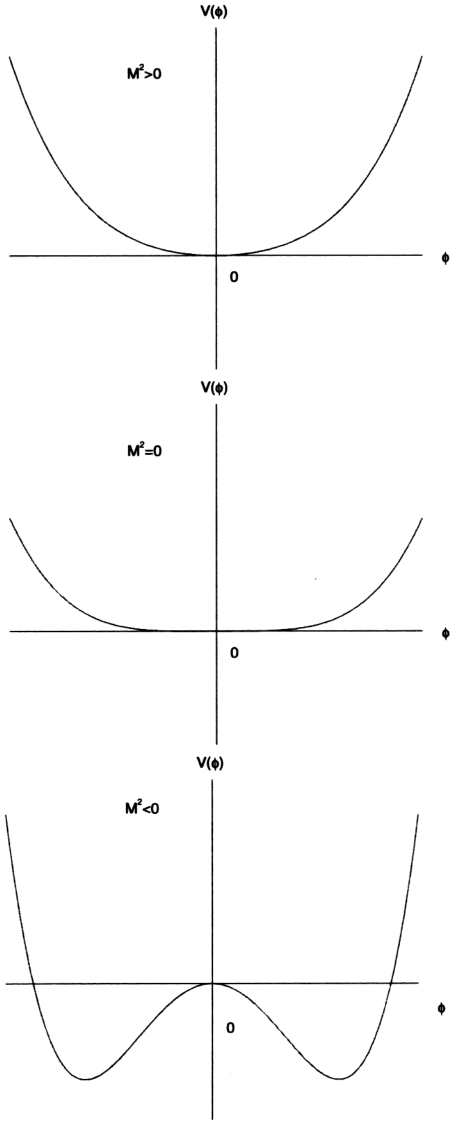


図 2.3：$\lambda\phi^4$ 理論の古典的なポテンシャルの模式図.（上）$M^2 > 0$ の場合．$\langle\phi\rangle = 0$ であるので，系は Z_2 対称性が保たれている対称相にある．また，$M_\phi > 0$ である．（中）$M^2 = 0$ の場合．$\langle\phi\rangle = 0$ であるが，同時に $M_\phi = 0$ でもあり，系は臨界点にある.（上）$M^2 < 0$ の場合．$\langle\phi\rangle \neq 0$ であるので，系は Z_2 対称性が自発的に破れた相にある．再び，$M_\phi > 0$ である．

れる典型的な様子をあらわしている．つまり，系のもつ対称性（この場合は Z_2）が成り立っている対称相とその対称性が自発的に破れる相の2つが存在し，その間に相転移線（：点や面の場合もある）が現れるというものである．また，対称性が破れるかどうかを見るには，対称性を破る演算子の真空期待値を計算すればよく，この量のことを秩序変数という．今の例では $\langle\phi\rangle$ が秩序変数である．

古典的には $(M^2 = 0, \lambda)$ が相転移線であるが，これが量子効果でどのように変わるのか見ていこう．量子効果を含めた系の相構造を図2.4（上）に与える．$\lambda = 0$ では量子効果がないので，$M^2 = 0$ が相転移点となり古典的な考察と一致する．λ がゼロから大きくなっていくと，相転移線がだんだん $M^2 = 0$ から負のほうにずれていく．つまり，相転移線を $M_c^2(\lambda)$ と書くと $M_c^2(\lambda \neq 0) < 0$ である．

次に相転移線の近傍での物理量の振る舞いを見ていこう．場 ϕ の無次元の質量を

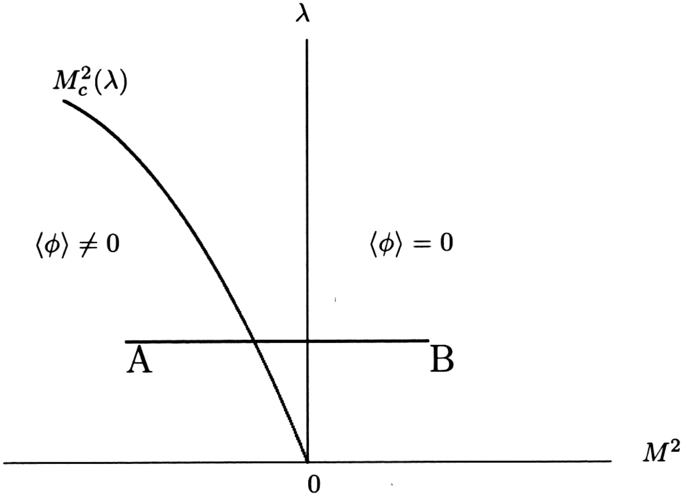
$$\sum_{\vec{n}} \langle \phi_n \phi_m \rangle \sim Z \exp[-M_\phi |n-m|], \qquad |n-m| \to \infty \tag{2.4.4}$$

で定義する．λ を固定して M^2 を相転移点 M_c^2 の近傍で動かすと

$$m_\phi a = M_\phi \simeq C|M^2 - M_c^2|^\nu, \tag{2.4.5}$$

と振舞う．ここで，ν は臨界指数と呼ばれる量で相転移を特徴づける物理量である．4次元の $\lambda\phi^4$ 理論の場合はどちらの相でも平均場近似での値 $\nu = \frac{1}{2}$ と一致する ことが知られている．比例係数 C は理論の詳細に依っているし，一般には C(破れた相)$\neq C$(対称相) と，相によって異なった値になる．図2.4（下）からもわかるように M_ϕ の振る舞いは $M^2 = M_c^2$ で明らかに非解析的である．

系の相転移線が知れれば，連続極限は (M^2, λ) を (M_c^2, λ_c) に近づけるか，より簡単に λ を固定して M^2 を $M_c^2(\lambda)^\pm$ に近づけるか，で実現される．後者の場合，$a \sim |M^2 - M_c^2|^\nu$ と考えることができる． 近づく点は同じでも，例えばどちらの相から近づくかによって，連続極限で得られる結果は異なる．相構造と連続極限の物理との関係は次章で詳しく考察する．



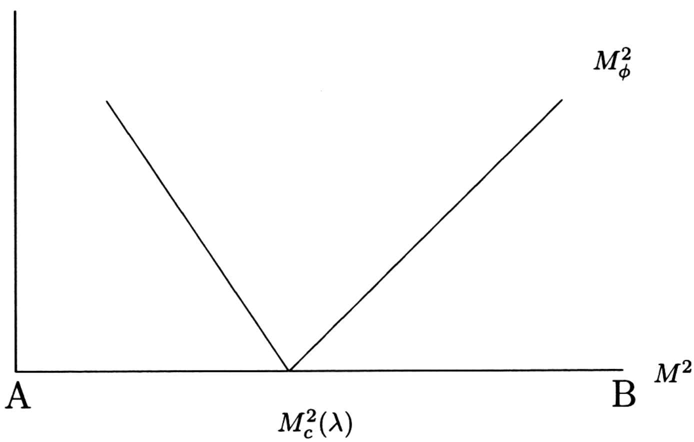


図 2.4： （上）$\lambda\phi^4$ 理論の相構造の模式図．横軸は質量パラメータ M^2，縦軸は結合定数 λ である．右側が対称相で左側が対称性が自発的に破れた相であり，その境界が相転移線 $M_c^2(\lambda)$ である．$\lambda \neq 0$ では量子効果により，古典論の時の $M_c^2 = 0$ からずれて $M_c^2(\lambda) < 0$ になっている．（下）λ を固定して M^2 を動かした時の質量 M_ϕ^2 の振る舞い．上の図の直線 AB で動かしたことに対応している．相転移点 $M_c^2(\lambda)$ 上では $M_\phi^2 = 0$ であり，それ以外では $M_\phi^2 > 0$ である．したがって，M_ϕ^2 の振る舞いは $M_c^2(\lambda)$ で非解析的になっている．

§2.5　コラム：有限体積効果

ここでは有限体積における秩序変数の振る舞いについて簡単に触れておく．有限体積では発散がないので，

$$\begin{aligned}\langle\phi\rangle &= \int[\mathcal{D}\phi]\ \phi\ e^{-S(\phi)} = \int[\mathcal{D}(-\phi)]\ (-\phi)\ e^{-S(-\phi)} = -\int[\mathcal{D}\phi]\ \phi\ e^{-S(\phi)} \\ &= -\langle\phi\rangle \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

という操作が数学的に厳密にできるので，

$$\langle\phi\rangle = 0 \tag{2.5.2}$$

が必ず成り立つ．ここで，対称性から $S(-\phi) = S(\phi)$ であることを用いた．また，対称性があるということから，積分の測度も不変であること，つまり，$\mathcal{D}\phi = \mathcal{D}(-\phi)$，を仮定している．したがって，有限体積では対称性は自発的には破れない．

そこで，有限体積の結果から対称性が破れるかどうかを見るには，秩序変数に対応し対称性を破る外場を導入して計算を行なう必要がでてくる．例えば，$\lambda\phi^4$ 理論の場合，

$$\begin{aligned}\langle\phi\rangle_{H,V} &= \frac{1}{Z(H,V)}\frac{1}{V}\int[\mathcal{D}\phi]\left\{\sum_n \phi_n\right\} e^{-S(\phi)+H\sum_n\phi(n)} \\ &= \frac{\partial\log Z(H,V)}{\partial H}\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

と計算される．$\langle\phi\rangle_{H,V}$ の V に対する振る舞いを模式的に書いたのが図 2.5 である．ここで体積を一定にして H を大きな値から徐々に小さくしていくことを考える．初めのうち，秩序変数は H の 1 次で減少していき，$H=0$ での切片はゼロでない有限の値に収束していくように見える．しかしながら，H がある値より小さくなると急激に減少して $H=0$ ではゼロになる．これは，有限体積では（外場のないとき）秩序変数が厳密にゼロになることに対応した振る舞いである．体積を大きくして同じ計算をすると途中の H まではほとんど同じ振る舞いをするが，こんどはより小さい H まで秩序変数はゼロでない切片に向かっていき，最後になってゼロに減少していく．つまり，ある体積では H をある値より小さくしてしまうと有限体積効果が大きくなってしま

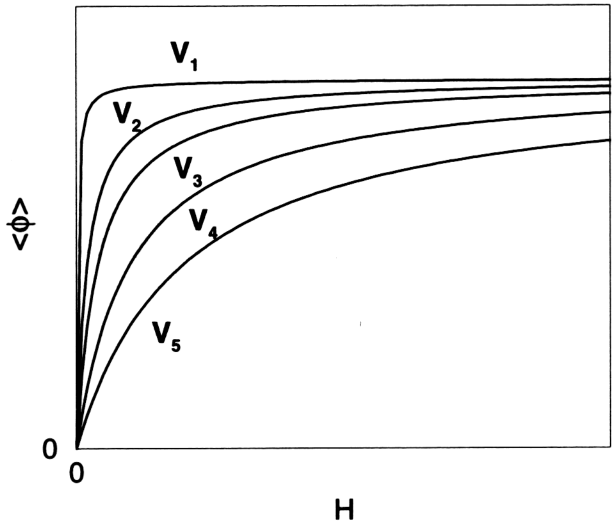


図 2.5：有限体積の場合の秩序変数 $\langle\phi\rangle$ の外場 H に対する振る舞いの模式図．$V_1 > V_2 > V_3 > V_4 > V_5$ である．いずれの場合も $H \to 0$ の極限で $\langle\phi\rangle \to 0$ であるが，体積が大きいほどより小さな H まで無限体積の極限に近い値をとる．

い，無限体積の結果を正しく予想するができなくなることを示している．したがって正しい秩序変数の計算の仕方は，

$$\langle\phi\rangle = \lim_{H\to 0}\lim_{V\to\infty}\langle\phi\rangle_{H,V} \tag{2.5.4}$$

である．このとき，2 つの極限操作は交換せず，無限体積の極限を最初にとらなくてはいけない．しかし，数値計算などでは無限体積にするのは不可能なので，いろいろな体積やいろいろな H の値で計算を行い，それらの結果に「有限体積のスケーリング則」を適用して無限体積と $H = 0$ の両方の極限への外挿値を推定する方法が取られている．有限体積のスケーリング則はかなり高度で基礎編の範疇を越えるので本書ではこれ以上触れない．

第 3 章
繰り込み群と連続極限

前章では，格子理論の連続極限について具体的な例を用いて説明してきたが，ここでは，連続極限についてより直観的，一般的に理解していきたい．そのために，物性理論，素粒子理論の両方で理論の解析に威力を発揮している「繰り込み群」を導入する．本当は繰り込み変換というほうが正確であるが，本書では慣習に従って，繰り込み群という用語も使うことにする．

§3.1 繰り込み群とは？

繰り込み群の中心となるのは「粗視化=短距離自由度の積分」という考え方である．例として，場の量子論の経路積分による解析を考えよう．場の自由度を一気に積分して 2 点関数などを計算できれば，それらを解析して粒子の質量などの理論の性質を知ることができる．しかしながら，これを実行するのは非常に難しいので，短距離，つまり高振動 (高エネルギー) の量子揺らぎを先に積分し，長距離，低振動 (低エネルギー) の場の自由度の有効理論を導き，その有効理論を調べることで理論の性質を知ることがしばしば行われる．もちろん，残った自由度を有効理論を使って積分すれば，一気に積分したときの答えと一致することは言うまでもない．

しかし，実際は短距離の自由度を積分することすらも簡単ではないので，この考えをもう少し巧妙にしたものが繰り込み群である．あるエネルギースケール Λ_1 までの自由度を積分した場合の有効作用を $S_{\rm eff}(\Lambda_1)$ とする．ここで $\Lambda_2 < \Lambda_1$ を取り，スケールが Λ_2 以上で Λ_1 以下の自由度を積分すること

で，$S_{\text{eff}}(\Lambda_2)$ が得られる．有効作用は粒子の質量 m や結合定数 λ などのパラメタを持つが，自由度を積分して $S_{\text{eff}}(\Lambda_1)$ が $S_{\text{eff}}(\Lambda_2)$ になったということを使って，$m(\Lambda_1) \to m(\Lambda_2), \lambda(\Lambda_1) \to \lambda(\Lambda_2)$ などパラメタの変換を定義できる．このパラメタの変換が繰り込み変換 (繰り込み群) である．通常の場の理論の繰り込み群方程式は $\Lambda_2 = \Lambda_1 - d\Lambda_1$ と無限小 $d\Lambda_1$ だけスケールを変えたことに対応していて，パラメタの微分 $-\dfrac{d\,m}{d\,\Lambda}(\Lambda)$，$-\dfrac{d\,\lambda}{d\,\Lambda}(\Lambda)$ などを計算している．

考えている理論のもともとの作用は簡単なもの (例えば $\lambda\phi^4$ 理論など) であっても，繰り込み変換によって複雑な相互作用が生成されるので，$S_{\text{eff}}(\Lambda_1)$ は一般に非常に複雑になる．したがって，繰り込み変換は無限次元の作用汎関数空間の中の写像であり，無限個のパラメタの組を違う無限個のパラメタの組に変換する．このような計算は実際にはほとんど不可能のように思えるか，実際は，ほとんどのパラメタは変換によってすぐに一定の値 (ゼロであることが多い) に収束してしまい，残った数個のパラメタの変換を考えれば良いことが多い．そして残った数個のパラメタによって理論の性質が決まっていく．これらのことはこれから実際に見て行くが，繰り込み変換で重要となるこれらのパラメタに対応する相互作用は「繰り込み可能な相互作用」と呼ばれている．

繰り込み変換の特徴の一つはその定義に必要な自由度の積分が有限のスケール間隔 (Λ_2 から Λ_1 まで) に制限されていることである．したがって，場の量子論に特徴的な発散が現われず厳密に定義することが可能になる．しかしながら，連続時空の場合はもともとの理論が無限大のエネルギースケールまでの自由度を含んでいるため，繰り込み変換を定義するにはスケールの何らかの上限を設けること (正則化) が必要になる．格子理論では格子間隔が自然にそのようなスケールの上限 (距離の下限) を与えるので，繰り込み変換は自然に定義される．繰り込み変換は人間が導入したものなので，その定義は一意的ではない．ここでは，ブロックスピン変換という物性理論で良く使われる方法を用いた繰り込み変換を扱う．

§3.2 繰り込み群の具体的定義

繰り込み変換 (繰り込み群) は，ブロックスピン変換とそれに引き続いての格子間隔の再定義という一連の操作からなる．

はじめにブロックスピン変換を定義しよう．簡単のために 2 次元の場合を考える．2 次元格子を $N \times N$ の小さなブロック格子に分ける．2 次元格子の大きさを $(nN) \times (nN)$ だとするとブロック格子は $n \times n$ 個できる．その 1 つ 1 つを区別するのに $\vec{i} = (i_1, i_2)(i_1, i_2 = 1, 2, \cdots, n)$ を用いる．ブロック格子 $\vec{i}$ 内のスピンの平均値 $\phi_N(\vec{i})$ をつぎのように定義する．

$$\phi_N(\vec{i}) \quad = \quad \frac{1}{N^2} \sum_{j_1, j_2 = 0}^{N-1} \phi(Ni_1 + j_1, Ni_2 + j_2) \qquad (3.2.1)$$

ここで，$\phi(\vec{k})$ は 2 次元格子点に定義されたスピン変数であり，ブロック $\vec{i}$ 内での平均値 $\phi_N(\vec{i})$ のことを「ブロックスピン」と呼ぶ．スピン変数 ϕ から，ブロックスピン ϕ_N を作る操作を「ブロックスピン変換」と呼ぶ．

スピン変数 ϕ に対する作用からブロックスピン変数 ϕ_N に対する作用は以下のように構成できる．

$$e^{-S_N(\phi_N)} \quad = \quad \int \mathcal{D}\phi \prod_{\vec{i}} \delta\Big(\frac{1}{N^2} \sum_{\vec{j}} \phi(N\vec{i} + \vec{j}) - c_N \phi_N(\vec{i})\Big) e^{-S(\phi)} \qquad (3.2.2)$$

ここでは式 (3.2.1) で導入してブロックスピンの定義をすこし一般化して，規格化因子 c_N を導入した．ブロックスピンをもとのスピンの単純な平均と考えていた式 (3.2.1) の場合は $c_N = 1$ であるが，量子効果を繰り込んだ一般的な場合も考えて c_N をパラメタにしておく．これは場の理論での波動関数の繰り込みに相当する規格化に対応している．ブロックスピン ϕ_N は作用 S_N を持つ格子間隔 Na の理論と考えるのが自然であるが，ここで格子間隔を $Na \to a$ と再定義すれば，あたかも前と同じ格子間隔 a で違うパラメタに対応する作用 S_N を持った理論と考えることができる．(ただし，実際は再定義された a は元の理論の Na に対応していることに注意して欲しい．このことは後で重要になる．) ブロックスピン変換とそれに引き続いた格子間隔の再定義を併せて（ファクター N の）「繰り込み群 (Renormalization Group)」変換と呼

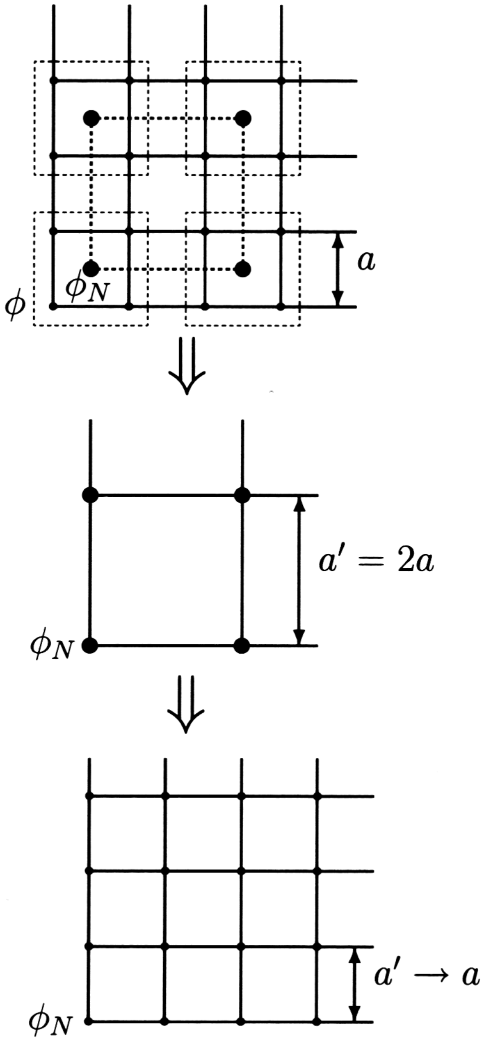


図 3.1：$N = 2$ の場合の 2 次元格子の繰り込み変換の模式図．初めにブロックスピン変換を行ない，その後，格子間隔を $2a$ から a に再定義する．

び，$(\mathrm{RG})_N$ と書く[1]．（図 3.1 を参照．）

S と S_N は同じ格子間隔の理論であるから，ϕ の作用として最も一般的なものを考えれば，S も S_N もその作用の特別な場合になっているはずである．したがって，繰り込み群変換は，作用を決定する系のパラメタ空間の 1 点から他の 1 点への変換になっている．

ブロックスピン変換では場の変数の積分を行っているだけなので，物理量の期待値は変換前の理論で計算しても変換後の理論で計算しても（それが両者で計算できるものであれば）同じであることが以下のようにして確かめられる．

$$
\begin{aligned}
& \langle \mathcal{O}(\frac{1}{c_N N^2}\sum\phi)\rangle_\phi \\
= \;& \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi\, e^{-S(\phi)}\mathcal{O}(\frac{1}{c_N N^2}\sum\phi) \\
= \;& \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi \int \mathcal{D}\phi_N \delta(\phi_N - \frac{1}{c_N N^2}\sum\phi)e^{-S(\phi)}\mathcal{O}(\frac{1}{c_N N^2}\sum\phi) \\
= \;& \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi_N \mathcal{O}(\phi_N)\int \mathcal{D}\phi\, \delta(\phi_N - \frac{1}{c_N N^2}\sum\phi)e^{-S(\phi)} \\
= \;& \frac{1}{Z}\int \mathcal{D}\phi_N \mathcal{O}(\phi_N)e^{-S_N(\phi_N)} \\
= \;& \langle \mathcal{O}(\phi_N)\rangle_{\phi_N}
\end{aligned}
\tag{3.2.3}
$$

分配関数 Z が等しいことは，$\mathcal{O}=\mathbf{1}$ と取って上と同じような計算を繰り返せば容易にわかる．

繰り込み群の例として $\lambda\phi^4$ 理論を考えよう．一番簡単な場合の系のパラメタは M^2 と λ であり，$\phi^2(\vec{n})$，$\phi^4(\vec{n})$ の項の係数である．ここで繰り込み群変換をすると，一般にいろいろな項が現われる．特にもともと 1 に規格化されていた $\phi(\vec{n})\phi(n \mp \vec{\mu})$ の係数は 1 からずれるが，前に導入した規格化因子 c_N を使ってその係数を 1 にとることができる．したがって，パラメタの間の変換は一般に，

$$
(M^2, \lambda, \cdots) \quad \rightarrow \quad (M_N^2, \lambda_N, \cdots) \tag{3.2.4}
$$

[1] この変換は逆変換が一意的に定義できないので厳密な意味では群ではないが，慣習的に「繰り込み群」と呼ぶ．

となる．ここで注意して欲しいのは，変換された理論での格子間隔 a は古い格子間隔 a の N 倍に対応していることである．

この変換 $(\mathrm{RG})_N$ を n 回やると

$$(M^2, \lambda, \cdots) \quad \to \quad (M^2_{N^n}, \lambda_{N^n}) \tag{3.2.5}$$

となる．この時，変換によって元の理論の長距離（低エネルギー）の領域が変換された理論では短距離（高エネルギー）に移される．(逆にいえば，繰り込み変換された理論の短距離の性質は元の理論の長距離の物理的性質を反映している.) したがって，変換された理論での近距離の物理量はもとの理論の長距離の物理量に等しい．a 程度の短距離での性質は作用のパラメタによってほぼ決まっているので，繰り込み群での「行き先」から元の理論の長距離での振る舞いを知ることができる．このように繰り込み群変換を使って理論の長距離の性質を調べることが可能になる．次の章では，$\lambda\phi^4$ 理論の繰り込み群変換を具体的に計算し，系の物理的性質との関係を議論する．

§3.3　$\lambda\phi^4$ 理論に対する繰り込み変換

ここでは d 次元の $\lambda\phi^4$ 理論の繰り込み変換の具体的な計算結果を紹介する．繰り込み変換の計算は文献 [15, 16] に詳しいが，付録 A にも詳細を与えておくので興味のある方は参照していただきたい．

$\lambda\phi^4$ のパラメタは M^2 と λ であるが，繰り込み変換をすると一般には他の項，例えば ϕ^6 などが生成される．しかし，ここではそのような項は無視して，$\mu = M^2$ と λ のみの変換に注目する．運動量空間での繰り込み変換を n 回した時と $n+1$ 回した時との理論のパラメタの関係は

$$\mu_{n+1} \simeq N^{2\theta-d}[\mu_n + c_1\lambda_n - c_2\mu_n\lambda_n - c_3\lambda_n^2] + O(\mu_n\lambda_n^2, \lambda_n^3) \tag{3.3.1}$$

$$\lambda_{n+1} \simeq N^{4\theta-3d}[\lambda_n - 3c_2\lambda_n^2] + O(\mu_n\lambda_n^2, \lambda_n^3) \tag{3.3.2}$$

で与えられる．(付録 A を参照.) ここで，正の定数 $c_i (i = 1, 2, 3)$ は $N > 1$ に依存するがその依存性は N の巾乗に比べてそれほど強くないので，以下の議論ではその N 依存性を無視する．また，θ は繰り込み変換での場の規格化を決めるパラメタであり，繰り込み変換に「固定点」が現われるように調節

される．スカラー場の運動項（運動量空間で $\frac{1}{2}\phi(-p)p^2\phi(p)$ と表される）の係数を 1 に規格化する場合は $\theta = \frac{d+2}{2}$ ととる必要があり，これに対応する固定点（の 1 つ）をガウス型固定点と呼ぶ．

上の関係式で与えられる繰り込み変換の流れの様子を見ていこう．まず，次のような量を定義する．

$$\mu_c(\lambda) = -\frac{c_1}{1-N^{2(\theta-d)}}\lambda + k\lambda^2 + O(\lambda^3) \tag{3.3.3}$$

ここで，定数 k は次式

$$\mu_{n+1} - \mu_c(\lambda_{n+1}) = N^{2\theta-d}(1-c_2\lambda_n)(\mu_n - \mu_c(\lambda_n)) \tag{3.3.4}$$

が成り立つように決定する[2]．この関係式から，

$$\begin{aligned} \mu_n - \mu_c(\lambda_n) &= N^{n(2\theta-d)}\left\{\prod_{i=0}^{n-1}(1-c_2\lambda_i)\right\}(\mu_0-\mu_c(\lambda_0)) \\ &\simeq N^{n(2\theta-d)}\exp[-c_2\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i][\mu_0-\mu_c(\lambda_0)]+O(\lambda^2) \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

とパラメタ μ に対する繰り込み群の流れ $\mu_0 \longrightarrow \mu_n$ が求まる．ただし，実際の流れを決定するには λ_i の振る舞いも知る必要がある．

一方，λ の変換から

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} = N^{3d-4\theta}\left(\frac{1}{\lambda_n} + 3c_2\right) \tag{3.3.6}$$

であるから，

$$\lambda^* = \frac{N^{4\theta-3d}-1}{3c_2} \tag{3.3.7}$$

と置くと，

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} - \frac{1}{\lambda^*} = N^{3d-4\theta}\left(\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda^*}\right) \tag{3.3.8}$$

となる．この関係から

$$\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda^*} = N^{(3d-4\theta)n}\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda^*}\right) \tag{3.3.9}$$

---

[2] 具体的には $k = \frac{1}{1-N^{6\theta-5d}}[c_3 - \frac{1-3N^{2(\theta-d)}}{1-N^{2(\theta-d)}}c_1 \cdot c_2]$ と与えられる．

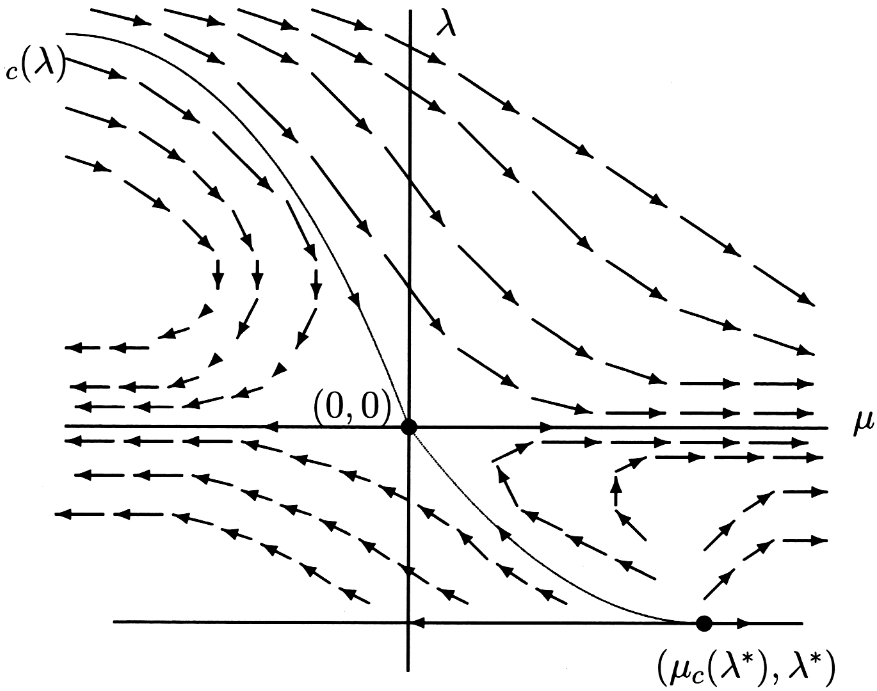


図 3.2：$d > 4$ の場合の ϕ^4 理論の繰り込み群の流れの模式図．横軸は質量パラメタ μ，縦軸は結合定数 λ．$(\mu, \lambda) = (0, 0)$ は赤外固定点，$(\mu, \lambda) = (\mu_c(\lambda^*), \lambda^*)$ は紫外固定点である．ただし，$\lambda^* < 0$ なので物理的ではないと考えられている．また，$\mu_c(\lambda)$ は相転移線を表す．

と，λ_0 から λ_n への繰り込み群の流れが求まる．このとき，$\lambda = \lambda^*$ は，繰り込み群の固定点になっている．これで，繰り込み群の流れが完全に決定された．

§3.3.1　$d > 4$ での繰り込み群の流れ

$d > 4$ の流れの様子を調べよう．$\theta = \frac{d+2}{2}$ を代入すると $\lambda^* < 0$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{N^{n(d-4)}}{\lambda_0}+\frac{1-N^{n(d-4)}}{\lambda^*}\right]^{-1}$$
$$\simeq N^{-n(d-4)}\frac{\lambda_0|\lambda^*|}{\lambda_0+|\lambda^*|}\to 0 \qquad (3.3.10)$$

ただし，$\lambda_0 \neq \lambda^*$ である．このことから $\lambda = 0$ が赤外固定点であることがわかる．また，$\lambda = \lambda^* < 0$ も固定点であるが，繰り込み群変換でこの固定点の近傍の領域（ただし，$\lambda > \lambda^*$ の領域）は固定点から離れていくので，その方向への紫外固定点であることがわかる．(ただし，$\lambda < 0$ の領域はポテンシャルの下限がなく不安定であるので，意味のある理論としては存在していないと思われる.)

次にパラメタ μ の振る舞いを見よう．n が充分大きければ

$$\mu_n \simeq A(\lambda_0)N^{2n}[\mu_0-\mu_c(\lambda_0)]+\mu_c(\lambda_n) \qquad (3.3.11)$$

と振る舞う．ただし，

$$A(\lambda_0) = \exp[-c_2\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i] \qquad (3.3.12)$$

であり，λ_i は λ_0 から式 (3.3.9) を用いて

$$\lambda_n = \left[\frac{N^{n(d-4)}}{\lambda_0}+\frac{1-N^{n(d-4)}}{\lambda^*}\right]^{-1} \qquad (3.3.13)$$

と計算できる．この関数は λ_0 が充分小さければ N^{2n} の振る舞いを変えるような特異性を持たない．実際，λ_0 の最低次では，

$$\lambda_n = \lambda_0 N^{n(4-d)}+O(\lambda_0^2) \qquad (3.3.14)$$

であるから，

$$\lim_{n\to\infty}A(\lambda_0)\to\exp[-\frac{c_2\lambda_0}{1-N^{4-d}}] \qquad (3.3.15)$$

となり，$n\to\infty$ の極限でも有限である．$A(\lambda_0)$ が強い特異性を持たない時は，式 (3.3.11) から，$\mu_0-\mu_c(\lambda_0)\neq 0$ であるかぎり，

$$\lim_{n\to\infty}\mu_n\to\pm\infty \qquad (3.3.16)$$

と発散していくことが分かる．また．$\pm$ の符号は $\mu_0-\mu_c(\lambda_0)$ の符号に対応

している．$\mu_0 - \mu_c(\lambda_0) = 0$ の場合はこのような発散はなく，

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n \quad = \quad \lim_{n\to\infty} = \begin{cases} \mu_c(0) & \lambda_0 > \lambda^* \\ \mu_c(\lambda^*) & \lambda_0 = \lambda^* \end{cases} \tag{3.3.17}$$

と，紫外固定点 λ^* 以外は，赤外固定点に吸い込まれていく.（ただし，$\lambda > \lambda^*$）この $\mu_c(\lambda)$ で決まる線は相転移線であり，そこでは相関距離が無限大になっている．この線上の流れが赤外固定点 $(0,0)$ に吸い込まれていくのは，繰り込み変換をしても無限大の相関距離が有限になることはできない，ということから理解できる．

固定点と繰り込み群の流れの様子を図 3.2 に描く．ただし，$\lambda < \lambda^*$ での振る舞いはここでの解析からは分からない．$\lambda = \lambda^*$ の固定点のまわりの振る舞いを調べるには θ を別の値に調整する必要がある．

§3.3.2　$d = 4$ での繰り込み群の流れ

$d = 4$ では $\lambda^* = 0$ なので，$d > 4$ の場合の解析方法は使えない．式 (3.3.2) より，

$$\frac{1}{\lambda_{n+1}} \quad = \quad \frac{1}{\lambda_n} + 3c_2 + O(\lambda_n) \tag{3.3.18}$$

となるから，この方程式を直接解くと

$$\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_0} = 3c_2 n \quad \to \quad \lambda_n = \left[\frac{1}{\lambda_0} + 3c_2 n\right]^{-1} \tag{3.3.19}$$

となる．$n \to \infty$ では λ_n は $1/n$ に比例して非常にゆっくりゼロになる．

一方，

$$\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \quad \simeq \quad \lambda_0 \int_0^n dx [1 + 3c_2\lambda_0 x]^{-1} = \frac{1}{3c_2} \log[1 + 3c_2\lambda_0 n] \tag{3.3.20}$$

と近似的に計算できるので，式 (3.3.5) より，

$$\mu_n \quad = \quad N^{2n} (1 + 3c_2\lambda_0 n)^{-1/3} \{\mu_0 - \mu_c(\lambda_0)\} + u_c(\lambda_n) \tag{3.3.21}$$

となる．したがって，やはり，$\mu_0 - \mu_c(\lambda_0) \neq 0$ である点は $n \to \infty$ でゆっくりではあるが $(\mu_n, \lambda_n) \to (\pm\infty, 0)$ に流れていき，$\mu_0 - \mu_c(\lambda_0) = 0$ という（相転移）線上の点は赤外固定点 $(0,0)$ に吸い込まれる.（図 3.3 を参照.）

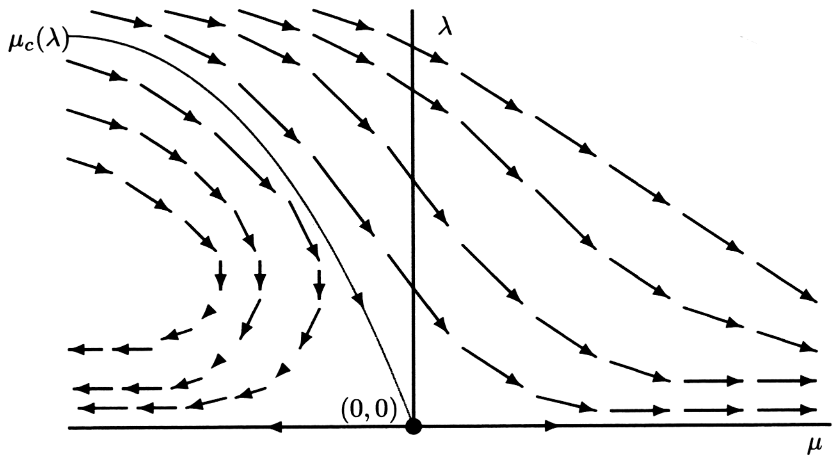


図 3.3：$d = 4$ の場合の ϕ^4 理論の繰り込み群の流れの模式図．$(\mu, \lambda) = (0, 0)$ は赤外固定点であり，$\mu_c(\lambda)$ は相転移線を表す．

§3.3.3 $d < 4$ での繰り込み群の流れ

最後に $d < 4$ の場合を考える．具体的には $d = 3$ などであるが，

$$\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda^*} \quad = \quad N^{n(d-4)}\left(\frac{1}{\lambda_0} - \frac{1}{\lambda^*}\right) \tag{3.3.22}$$

なので，n が大きくなると $\lambda \to \lambda^* = O(1) > 0$ となるので，一般には λ に関する摂動展開による解析が信頼できなくなる．したがって，赤外固定点 λ^* の存在自体が結論できない．この困難をさけるために，d を連続的なパラメタと考え，$d = 4 - \epsilon$ と 4 より微小量 ϵ だけ小さい「次元」の場合に解析する．この時，

$$\lambda^* \quad = \quad \frac{N^\epsilon - 1}{3c_2} = \epsilon \log N/(3c_2) + O(\epsilon^2) \tag{3.3.23}$$

と確かに λ^* は微小量になっている．

この時，λ は $(\lambda_0 \neq 0)$

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \quad \simeq \quad \lambda^* + \frac{\lambda^*}{\lambda_0}(\lambda_0 - \lambda^*)N^{-\epsilon n} \to \lambda^* \tag{3.3.24}$$

と λ^* に近づいていく．

また，(3.3.5) 式より，

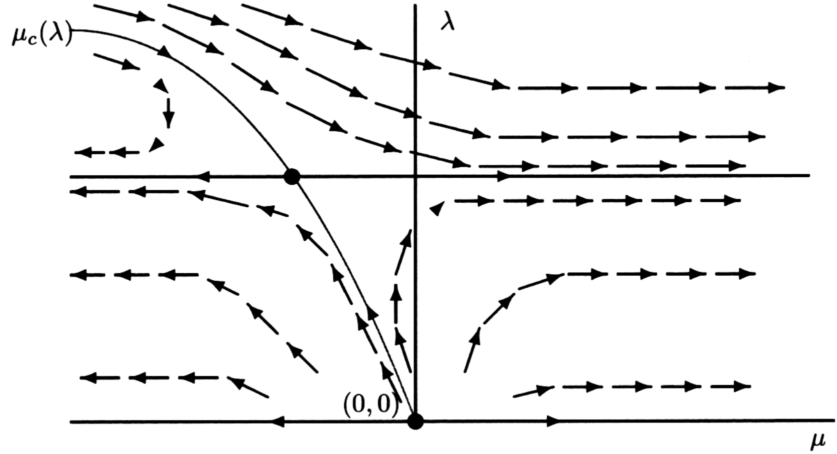


図 3.4：$d < 4$ の場合の ϕ^4 理論の繰り込み群の流れの模式図．$(\mu,\lambda) = (0,0)$ は紫外固定点，$(\mu,\lambda) = (\mu_c(\lambda^*),\lambda^*)$ は Wilson-Fisher 固定点と呼ばれる赤外固定点である．$\lambda^* > 0$ なので物理的に意味のある固定点と考えられる．ただし，脚注で述べたように摂動の高次を考えるとパラメタ θ は 2 つの固定点で異なるので，1 つの繰り込み変換でこの図のようにパラメタが動いて行くわけではない．$\mu_c(\lambda)$ は相転移線を表す．赤外固定点から $\mu = \pm\infty$ に伸びている軌跡は，$\mu \neq \mu_c$，$\lambda \neq 0$ である領域が繰り込み変換によって移される領域の漸近線となっており，renormalized trajectory と呼ばれている．

$$\begin{aligned}\mu_n &\simeq N^{n(2\theta-d)}\exp[-c_2\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i-\lambda^*)-c_2n\lambda^*]+\mu_c(\lambda_n)\\ &= b_nN^{2n\theta/3}(\mu_0-\mu_c(\lambda_0))+\mu_c(\lambda_n)\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}b_n &= \exp[-c_2\sum_{i=0}^{n-1}(\lambda_i-\lambda^*)]\\ &\simeq \exp[-c_2\frac{\lambda^*(\lambda_0-\lambda^*)}{\lambda_0}\frac{1-N^{-\epsilon n}}{1-N^{-\epsilon}}]\\ &\simeq \exp[-(1-N^{(3d-4\theta)n})(\lambda_0-\lambda^*)/(3\lambda_0)]\end{aligned}\tag{3.3.26}$$

と評価できる．(最後の式変形では $1-N^{-\epsilon} \simeq \epsilon\log N$ という近似を使った．) したがって，$(\mu,\lambda) = (0,0)$ のガウス型（紫外）固定点の他に $(\mu,\lambda) = (\mu_c(\lambda^*),\lambda^*)$

の赤外固定点が存在する．この固定点は Wilson-Fisher 固定点と呼ばれている[3]．この固定点は $\lambda^* > 0$ に存在するので $d > 4$ の場合と違って，物理的に意味のある固定点である．繰り込み群の流れは，図 3.4 に与えられる．

$d = 3$，つまり $\epsilon = 1$ の場合には，上の解析の適用限界を越えているが，定性的には得られる結論に違いはない．詳しい解析に興味のある方は文献を見て欲しい．

§3.4 繰り込み群に基づいた連続極限の描像

ここでは繰り込み群を用いて「連続極限」を定義してみる．繰り込み変換 RG_N を n 回やると

$$(\mu_0, \lambda_0, \xi) \quad \rightarrow \quad (\mu_{(n)}, \lambda_{(n)}, \xi_{(n)}) \tag{3.4.1}$$

$$a_0 \quad \rightarrow \quad a_n \Leftrightarrow N^n a_0 \tag{3.4.2}$$

となるので，もし，a_n を固定して $n \rightarrow \infty$ の極限をとると，

$$\lim_{n\rightarrow\infty} a_n \quad = \quad a(\text{ fixed}) \Leftrightarrow a_0 = \lim_{n\rightarrow\infty} \frac{a}{N^n} \rightarrow 0 \tag{3.4.3}$$

となる．つまり，繰り込み群の流れの行き先は，元の格子間隔 a_0 がゼロになった場合の物理に対応しているわけである．前章で述べたように，連続極限をとるということは系のパラメタを

$$(\mu_0, \lambda_0) \quad \rightarrow \quad (\mu_c, \lambda_c) \tag{3.4.4}$$

と相転移点に近づけることであった．相転移点の近傍に繰り込み変換を多数回行うとその流れは相転移点から離れていくが，相転移線上では流れは外に出ることはないので，そこに近ければ近いほど遠ざかる流れの速度は遅くなる．したがって，相転移線の近傍の点 (μ, λ) が n 回の変換である点 (μ_R, λ_R) に移ったとすると，変換を $n+1$ 回するときには，より相転移線に近い点 (μ', λ') から出発することで，やはり (μ_R, λ_R) に（ほぼ）移るようにできるはずであ

[3] ただし，摂動展開の高次補正をいれてもこの固定点が存在するためには $\theta = (d+2)/2 - \epsilon^2/108$ と ϵ^2 のオーダーでガウス型固定点のパラメタ $\theta = (d+2)/2$ からずらす必要であることが知られている．

る．つまり，相転移線に近づけながら無限回の繰り込み変換を行えば，その流れは遠くに発散してしまうことはなく，ある点に収束する：

$$(\mu_{(n)}, \lambda_{(n)}) \quad = \quad (\mu_R, \lambda_R) \tag{3.4.5}$$

ただし，繰り込み変換の出発点のパラメタ (μ, λ) は $n \to \infty$ で

$$\lim_{n\to\infty} (\mu, \lambda) = (\mu_c, \lambda_c) \tag{3.4.6}$$

と近づくように極限を定義している．ここで得られた (μ_R, λ_R) は理論の裸のパラメタであるが，上の対応から，(相転移線に近づけることで実現した) 連続極限での長距離（低エネルギー）での（繰り込まれた）パラメタになっているはずである．つまり，(μ_R, λ_R) は連続極限（あるいは運動量のカットオフが無限大）での繰り込まれた質量と結合定数である．

前節で述べたように，繰り込み変換では物理量（の期待値）は変わらないので，例えば，

$$\langle\phi_0(0)\phi_0(N^n s a_0)\rangle_0 \quad = \quad \langle\phi_n(0)\phi_n(s a_n)\rangle_n \tag{3.4.7}$$

と 2 つの理論の相関関数は一致する．ここで，添え字 0 はもとの理論の変数や期待値，n は n 回変換された理論のものを表わす．変換された理論の短距離がもとの理論の長距離に対応することが見て取れる．

以上のように，繰り込み群の流れがわかると連続理論でどのような物理が実現されるかを予想することができる．次節ではいくつかの例を使って連続極限の性質を考察しよう．

§3.5　スカラー場の理論の連続極限の例

ここでは前に求めたスカラー場の繰り込み群の流れの結果を使って，スカラー場の理論の連続極限の性質について議論する．

§3.5.1　4 次元の $\lambda\phi^4$ 理論

4 次元の $\lambda\phi^4$ 理論の繰り込み群の流れは図 3.3 の通りである．前に求めた結果から 4 次元の場合の固定点は $(\mu, \lambda) = (0, 0)$ のみであり，(赤外の) 吸い込みになっている．相転移線は $\lambda = \infty$ からこの赤外の固定点につながってお

り，その線より μ が大きい側が対称相で，小さい側が対称性が自発的に破れた相である．繰り込み群の流れは相転移線上では λ の大きい方から固定点に流れている．相転移線以外でもやはり λ の大きい方から $\lambda = 0$ まで流れていくが，対称相では $(\infty, 0)$，対称性の破れた相では $(-\infty, 0)$ を目指している．

前節の議論をこの繰り込み群の流れに適用すると繰り込まれた結合定数がゼロになることが示唆される．実際，前の計算では裸の結合定数が十分小さければ $(\lambda \ll 1)$，$n \to \infty$ の極限で

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{1 + A \cdot n} \to 0 \tag{3.5.1}$$

であるので，繰り込まれた結合定数はゼロになる．実は，この性質は裸の結合定数が大きいときにも成り立つと考えられている．つまり，

$$\lim_{n\to\infty} (\mathrm{RG}_N)_n \lambda = 0 \tag{3.5.2}$$

が任意の $0 \leq \lambda \leq \infty$ で成り立ち，したがって，連続極限で繰り込まれた結合定数が

$$\lambda_R \to 0, \qquad a \to 0 \tag{3.5.3}$$

と，どんな場合でもゼロになり，自由場の理論しか構成できないことを示している．このことを「4 次元 $\lambda\phi^4$ 理論の自明性」と呼ぶ．摂動展開で考える限り，裸の結合定数がゼロでなければ自由場に見えないので，この「自明性」はまったく非摂動的な性質である[4]．$d > 4$ の場合はスカラー理論の「自明性」の厳密な証明が存在する．4 次元の場合の「自明性」の厳密な証明はないが，ある種の仮定を使った証明や直感的な議論，数値計算などから「自明性」は 4 次元でも成り立っていると考えられている．(詳しくは文献 [18] を参照.)「自明性」は摂動的な見方が間違っているセンセーショナルな例であり，多くの人々に場の理論における非摂動的理解の必要性を強く認識させる契機となった．

---

[4] 素粒子論の繰り込み群の計算を行うと，スカラー理論の場合にエネルギースケールに依存した結合定数 (running coupling) に極が現れる．この極はランダウ極と呼ばれ,「自明性」を意味していると思われる．実際，ランダウ極があると，繰り込まれた結合定数がゼロでないかぎり，あるエネルギーで running coupling が発散してしまう．

厳密な証明の話は別としても，直感的には繰り込み群の赤外固定点が連続極限の理論の性質を与えており，この場合は $\lambda_R = 0$ であることが繰り込み群の流れの図からすぐに読み取れる．

§3.5.2　$2 < d < 4$ 次元の $\lambda\phi^4$ 理論

ϵ 展開の結果に基づいた繰り込み群の流れは図 3.4 のようになる．この場合は 2 つの固定点が現れる．

- 紫外固定点が $(\mu, \lambda) = (0, 0)$ にある．繰り込み群の流れはこの固定点から湧き出すようになっている．4 次元の時とは異なり，紫外固定点が自由場 $(\lambda = 0)$ の場合は，そこから湧き出る繰り込み群の流れの行き先の結合定数はゼロでないので，必ず $\lambda_R \neq 0$ となり，非自明な連続極限が構成できる．このように自由場の紫外固定点がある理論は漸近的自由な理論と呼ばれている．(漸近的自由とは短距離，あるいは高エネルギーで結合定数がゼロに近づいていくことを意味している.)
- 赤外固定点が $(\mu, \lambda) = (\mu_f, \lambda_f)$ に現れる．この点は繰り込み群の流れの吸い込みなので，このまわりで連続極限を構成すると繰り込まれた結合定数は必ず $\lambda_R \to \lambda_f$ と固定点の値になる．$\lambda_f \neq 0$ であるから，構成された連続極限は必ず非自明であるが，物理的にどのような理論になるかは未だにはっきりしていない．これは，漸近的自由の理論の場合，短距離で相互作用が弱くなり摂動的な見方ができ，スカラー場に対してはスカラー粒子が漸近状態として存在するという解釈ができるが，非自明な赤外固定点ではそのような見方ができないからである．そもそも自由場を基準にして λ を結合定数と解釈しているので，その解釈が出来ないような固定点のまわりの物理的性質は繰り込み群だけではわからない．

赤外固定点での連続極限の構成は未解決の問題であるが，漸近的自由な固定点では連続極限で非自明な場の理論は必ず構成できる．このことが,「非自明な場の理論は必ず漸近的自由である」という神話を生み出した理由である．

繰り込み群の流れから明らかなように 2 つの固定点は相転移線上に存在し，繰り込み群の流れの 1 つは紫外から赤外に流れている．また，固定点（の無

限小の近傍）から流れ出ている線が存在しているが，その線は「繰り込まれた軌跡」(renormalized trajectory) とよばれ，文字通り，繰り込まれた理論で取り得る（繰り込まれた）パラメタの値 (μ_R, λ_R) の軌跡を現している．

§3.6 ユニバーサリティ（普遍性）

繰り込み群による場の理論の連続極限の解析法を考えてみると，連続極限でどのような場の理論が構成されるかということと，繰り込み群の固定点の分類とその固定点の性質とが対応していることが分かる．

ある固定点のまわりで，あるパラメタが繰り込み変換によって固定点から遠ざかっていく（増えていく）とき，そのパラメタを「意味のある」(relevant) パラメタと呼び，逆に固定点に近づいていく（減っていく）とき，「重要でない」(irrelevant) と呼ぶ．スカラー理論の質量パラメタ μ は「意味のある」パラメタで，4 次元では $\phi^{4+n}(n=1,2,\cdots)$ の項の係数は「重要でない」パラメタである．繰り込み変換によって変わらないパラメタは「中間的な」(marginal) パラメタと呼ばれるが，詳しく見ていくと必ず，「意味のある」パラメタか「重要でない」パラメタかのどちらかになる．例えば，4 次元の $\lambda\phi^4$ 理論の結合定数 λ は次元から考えると「中間的」であるが，詳細に調べると $\lambda = 0$ の固定点に対して「重要でない」パラメタであり，これが理論の自明性になったわけである．

これらの定義から，固定点の分類，性質は「意味のある」パラメタの数と種類によって決まってくることがわかる．このことから，統計力学では 2 次相転移に関して次のような「普遍性」(Universality) が成り立つと信じられている．『固定点のまわりの「意味のある」パラメタの数と種類は理論の詳細に依らず，系の対称性だけで決まっている．相転移は固定点の性質のよって支配されているので，したがって，相転移現象は理論の詳細に依らず，系の対称性だけで決まってしまう．』この「普遍性」の考えを格子理論によって構成された連続極限に当てはめると，『連続極限の性質は系の対称性にだけで決まり，理論の詳細にはよらない．』ということが言えてしまう．また，このことから，格子作用に「重要でない」パラメタを持つ項をいくら付け加えても，系の対称性を変えない限り連続極限の性質は変化しないこともわかる．

第 4 章

格子上のゲージ場の理論

前章までは格子理論を直感的に理解するための説明をしてきたが，具体的な計算方法などは詳しくは触れてこなかった．この章以降でいよいよ格子理論のメインテーマである「格子ゲージ理論」を詳しく具体的に紹介していこう．つまり，いままでは謂わば「前座」であり，これからが「本番」である．

§4.1 連続理論の QCD

格子ゲージ理論を導入する前に連続理論の QCD を紹介し，そこから「格子化」へのヒントを考えていきたい．

連続理論での QCD のラグランジュアンは以下のように与えられる．

$$L \quad = \quad \bar{\psi}\gamma_\mu D_\mu \psi + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}^2 \tag{4.1.1}$$

ここで，ψ はクォークに対応するフェルミオン場であり，$D_\mu = (\partial_\mu + igA_\mu)$ は共変微分，$F_{\mu\nu}$ は SU(3) 非可換ゲージ場 A_μ に対応する「場の強さ」で

$$F_{\mu\nu} \quad = \quad \frac{1}{ig}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu] \tag{4.1.2}$$

と与えられる．この理論の最大の特徴は「ゲージ不変性」である．「ゲージ不変性」とはラグランジュアンが以下のゲージ変換に対して不変になっていることを指す．

$$\begin{aligned} \psi(x)' &= \Omega(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x)' &= \bar{\psi}(x)\Omega(x)^\dagger \\ A_\mu(x)' &= \frac{1}{ig}\Omega(x)\partial_\mu\Omega(x)^\dagger + \Omega(x)A_\mu(x)\Omega(x)^\dagger \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

ここで $\Omega(x) \in \mathrm{SU}(3)$ は局所ゲージ変換関数である．この変換でラグランジュアン (4.1.1) が不変であることは容易に示せるので各自でチェックして欲しい．

ラグランジュアンの場合は（微分項はあるにしても）すべて時空点 x の場の量のみで書かれていたが，次のような非局所的な量をゲージ不変にするにはどうしたらいいであろうか？

$$\bar{\psi}(x)\psi(x+\Delta x). \tag{4.1.4}$$

Δx が小さい場合は次のようにすればゲージ不変になる．

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(x)[1+ig\Delta x^\mu A_\mu(x)]\psi(x+\Delta x) &= \bar{\psi}(x)[1+\Delta x^\mu(\partial_\mu + igA_\mu)]\psi(x) \\ &+ O((\Delta x)^2) \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

$\bar{\psi}(x)\psi(x)$ も $\bar{\psi}(x)(\partial_\mu + igA_\mu)\psi(x)$ もゲージ不変なので，確かに $O((\Delta x)^2)$ を無視すれば全体もゲージ不変になっている．

Δx が有限の場合は $(\Delta x)^2$ を無視することができない．有限に離れた 2 点 x, y の場合は以下のような変更が必要である．

$$\bar{\psi}(x)\underbrace{P\exp[ig\int_x^y A_\mu(z)dz^\mu]}_{\equiv U(x,\ y)}\psi(y) \tag{4.1.6}$$

ここで P は経路順序積 (path ordered product) と呼ばれている量で以下のように定義される．

$$P\exp[ig\int_x^y A_\mu(z)dz^\mu] = \lim_{N\to\infty}\Pi_{n=0}^{N-1}[1+igA_\mu(x+n\Delta x)\Delta x^\mu] \tag{4.1.7}$$

ここで，$|\Delta x| = |y-x|/N$ である．

上で定義された $U(x,y)$ の変換性を考えよう．始めは簡単のために可換群の場合を考える．この時，

$$\Omega(x) = e^{i\theta(x)} \tag{4.1.8}$$

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\theta/g \tag{4.1.9}$$

となるので,

$$U(x,y)' = \exp ig\left[-\int_x^y \frac{\partial_\mu\theta}{g}dz^\mu\right]U = e^{i\theta(x)}Ue^{-i\theta(y)}$$
$$= \Omega(x)U(x,y)\Omega(y)^\dagger \qquad (4.1.10)$$

と共変的に変換することがわかる.

次に非可換ゲージ群の場合を考える. 定義より

$$U(x,y)' = P\exp[ig\int_x^y A_\mu(z)'dz^\mu]$$
$$= \lim_{N\to\infty}\Pi_{n=0}^{N-1}\left[1+igA_\mu(x+n\Delta x)'\Delta x^\mu\right] \qquad (4.1.11)$$

となる. $x_n = x + n\Delta x$ と置くと

$$1+igA_\mu(x_n)'\Delta x^\mu = 1+\Omega(x_n)\partial_\mu\Omega(x_n)^\dagger\Delta x^\mu$$
$$+ \quad ig\Omega(x_n)A_\mu(x_n)\Omega(x_n)^\dagger\Delta x^\mu$$
$$= \Omega(x_n)\Omega(x_{n+1})^\dagger + ig\Omega(x_n)A_\mu(x_n)\Omega(x_{n+1})^\dagger\Delta x^\mu + O\left((\Delta x)^2\right)$$
$$= \Omega(x_n)\left[1+igA_\mu(x_n)\Delta x^\mu\right]\Omega(x_{n+1})^\dagger + O\left((\Delta x)^2\right) \qquad (4.1.12)$$

と評価できるから,

$$U(x,y)' = \lim_{N\to\infty}\left\{\Pi_{n=0}^{N-1}\Omega(x_n)[1+igA_\mu(x_n)\Delta x^\mu]\Omega(x_{n+1})^\dagger+O\left((\Delta x)^2\right)\right\}$$
$$= \Omega(x)\lim_{N\to\infty}\left\{[1+igA_\mu(x+n\Delta x)\Delta x^\mu]+O\left((\Delta x)^2\right)\right\}\Omega(y)^\dagger$$
$$= \Omega(x)U(x,y)\Omega(y)^\dagger \qquad (4.1.13)$$

となり, $U(x,y)$ が共変的に変換することが証明された.

ここで定義された $U(x,y)$ は, $\Delta x = y - x$ が有限でも十分小さければ

$$U(x,y) \simeq \exp\left[ig\Delta x^\mu A_\mu(x+\Delta x/2)\right] \qquad (4.1.14)$$

と近似的に書くことができる.

§4.2 ゲージ場に対する格子作用

§4.2.1 ゲージ場とリンク変数

前章まででで見てきた様にスカラー場は x を変数にしているので, 格子理論では格子点 n 上に定義されるのが自然である. ゲージ場の場合は座標 x だけ

でなく，方向 μ にも依存するので，格子上の点ではなく，方向をもったリンク (n,μ) 上に定義されるであろう．

SU(N) ゲージ理論のゲージ場は

$$A_\mu = A_\mu^a T^a \in \mathcal{SU}(N) \tag{4.2.1}$$

で与えられる．ここで，T^a は $N \times N$ 行列で

$$\mathrm{tr}\ T^a = 0, \qquad (T^a)^\dagger = T^a \tag{4.2.2}$$

$$\mathrm{tr}\ T^a T^b = \frac{1}{2}\delta_{ab}, \qquad [T^a, T^b] = if^{abc}T^c \tag{4.2.3}$$

を満たす．また，$\mathcal{SU}(N)$ は群 SU(N) のリー代数である．A_μ をリンク上の変数としたいところであるが，A_μ はゲージ変換に対して共変的には変換しないので，このままではリンク上の変数とすることはできない．

ここでは，そのかわりに，前節に考察した $U(x, x+\Delta x)$ を基本的なリンク変数にとることを考える．リンク $(n, n+\mu)$ の上に定義された変数 $U_{n,\mu}$ を

$$U_{n,\mu} \equiv U(x, x+\hat{\mu}a) = e^{igaA_\mu(n+\hat{\mu}/2)} \in \mathrm{SU(N)} \tag{4.2.4}$$

と定義する．ここでは，$x = na$, $\Delta x = \hat{\mu}a$ で，$\hat{\mu}$ は μ 方向の単位ベクトルである．ただし，複雑な表式の中では，誤解のない限り $\hat{\mu}$ を単に μ と書く場合があるので注意されたい．また，式 (4.1.14) と同様に，

$$\int_x^{x+\hat{\mu}a} A_\nu(y)dy^\nu \simeq a(e_\mu)^\nu A_\nu((n+\hat{\mu}/2)a) = aA_\mu(n+\hat{\mu}/2) \tag{4.2.5}$$

と近似した．最後の式では A_μ の引数の中の a を省略して，$n+\hat{\mu}/2$ と書いている．しかし，今後は $U_{n,\mu}$ を基本的な変数として考えることにするので，$U_{n,\mu}$ と A_μ との関係である式 (4.2.5) は，連続理論との対応を考えたり摂動展開をしたりする時以外は必要でない．つまり，以下では，はじめに $U_{n,\mu}$ ありきとして話を進めていく．

リンク変数は方向をもった量として定義されているので，逆向きの変数を

$$U_{n+\hat{\mu},-\mu} \equiv U_{n,\mu}^\dagger \tag{4.2.6}$$

のように定義する．

リンク変数に対するゲージ変換は $U(x, x+\Delta x)$ の場合を参考に，

$$U_{n,\mu} \longrightarrow U_{n,\mu}^g = g_n U_{n,\mu} g_{n+\mu}^\dagger \tag{4.2.7}$$

と定義する．ここで，$g_n \in SU(N)$ は局所的なゲージ変換関数である．この定義によると，リンク変数の積は

$$\prod_{n\to m} U \equiv U_{n,\mu_1} U_{n+\mu_1,\mu_2} \cdots U_{m-\mu_k,\mu_k} \longrightarrow g_n \left[\prod_{n\to m} U\right] g_m^\dagger \qquad (4.2.8)$$

と変換することがわかる．このように U の積の変換性は始点と終点の変換関数のみによるので，点 n で閉じた曲線 C_n 上の U の積の変換は

$$\prod_{C_n} U \quad\longrightarrow\quad g_n \left[\prod_{C_n} U\right] g_n^\dagger \qquad (4.2.9)$$

となるので，$\mathrm{tr} \prod_{C_n} U$ はゲージ不変になることは容易にわかる．

§4.2.2 格子作用

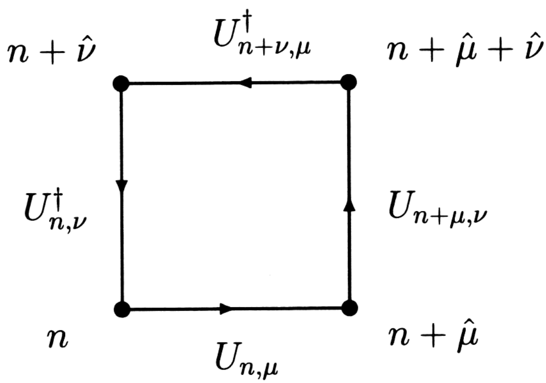


図 4.1：プラケット項.

さて，ここでは，ゲージ場に対する格子作用を考えよう．格子作用を決める際の原理（2）より作用にゲージ不変性を要求すると，前節の結果から一般的な作用は以下のようにかけるはずである．

$$S = \sum_{n} \sum_{\Gamma_n \in \text{closed loop}} \beta_\Gamma \text{tr}\, O_{\Gamma_n}, \quad O_{\Gamma_n} = \prod_{i \in \Gamma_n} U_i \quad (4.2.10)$$

ここで Γ_n は格子点 n を始点とする任意の閉じたループの1つである．格子理論の普遍性を信じれば，どのループを考えても（連続極限では）同じ結果になるわけだから，ここでは一番簡単な単位正方形を選ぶ．(これをプラケットと呼ぶ．図4.1を参照.）そうすると，格子作用は

$$S = \sum_{n,\mu\neq\nu} \beta\, \text{tr}\ [U_{n,\mu}U_{n+\mu,\nu}U^\dagger_{n+\nu,\mu}U^\dagger_{n,\nu}] = \sum_{n,\mu<\nu} 2\beta\, \text{Re tr}[U_{\mu\nu}(n)] \quad (4.2.11)$$

となる．ここで

$$U_{\mu\nu}(n) = U_{n,\mu}U_{n+\mu,\nu}U^\dagger_{n+\nu,\mu}U^\dagger_{n,\nu} \quad (4.2.12)$$

と定義した．この作用をプラケット作用と呼ぶ．

この作用は本当にゲージ場の作用になっているだろうか？ それを見るために $a \to 0$ の極限で作用がどうなるかを考えてみよう．

$$U_{n,\mu} = e^{iagA_\mu(n+\mu/2)} \quad (4.2.13)$$

とおき，ハウスドルフの公式

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\cdots} \quad (4.2.14)$$

を用いると

$$\begin{aligned}
\text{tr}\, U_{\mu\nu}(n) &= \text{tr}\left[\exp[iag\{A_\mu(n+\mu/2)+A_\nu(n+\mu+\nu/2)+\frac{iag}{2}[A_\mu,A_\nu]+\cdots\}]\right. \\
&\times \left.\exp[-iag\{A_\mu(n+\nu+\mu/2)+A_\nu(n+\nu/2)-\frac{iag}{2}[A_\mu,A_\nu]+\cdots\}]\right] \\
&= \text{tr}\ [\exp iag[\{A_\nu(n_c+\mu/2)-A_\nu(n_c-\mu/2)\}-\{A_\mu(n_c+\nu/2) \\
&\quad -A_\mu(n_c-\nu/2)\}+iag[A_\mu,A_\nu]+O(a^2)]] \\
&= \text{tr}\ [\exp[ia^2gF_{\mu\nu}(n_c)+a^3X_3+a^4X_4+O(a^5)]] \\
&= \text{tr}\left[\{1+\underbrace{ia^2gF_{\mu\nu}(n_c)+a^3X_3+a^4X_4}_{\sim 0}+\frac{a^4g^2}{2}F_{\mu\nu}(n_c)^2+\cdots\}\right]
\end{aligned} \quad (4.2.15)$$

となる．ただし，$n_c = n+\mu/2+\nu/2$, $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + ig[A_\mu, A_\nu]$ である．また，X_3, X_4 は $\mathcal{SU(N)}$ に値をとるが，ここでは具体的な形は問題にしない．ただし，$\mathrm{tr}\ T^a = 0$ という性質から，$\mathrm{tr}\ \{F_{\mu\nu}\} = \mathrm{tr}\ \{X_3\} = \mathrm{tr}\ \{X_4\} = 0$ がいえる．この性質を使うと，最終的に

$$\lim_{a\to 0} S = \sum_{n,\mu\neq\nu} \beta[\mathrm{tr}\ 1 - \frac{a^4 g^2}{2}\mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}^2] + O(a^6) \tag{4.2.16}$$

となる．補正項が $O(a^5)$ でなく，$O(a^6)$ となることは，付録 B で議論する．物理には関係ない定数項を無視すれば，$a \to 0$ の極限で

$$S_G \quad \to \quad -a^4 \sum_n \sum_{\mu<\nu} \beta g^2\ \mathrm{tr}\ \ F_{\mu\nu}^2 \tag{4.2.17}$$

となり，ゲージ不変性の要請（格子作用を決める原理（2））から決めた格子作用は $a \to 0$ の極限で連続理論のゲージ場の作用に比例していることがいえる．さらに，比例定数を含めて連続理論の作用を再現する（格子作用を決める際の原理（1））ためには，$\beta = \dfrac{1}{g^2}$ と取ればよく，この時，

$$S_G \quad \to \quad -\int d^4x \sum_{\mu<\nu}\ \mathrm{tr}\ \ F_{\mu\nu}^2 \tag{4.2.18}$$

と連続理論の作用を比例定数を含めて再現する．

実は，プラケット作用が連続極限で $\mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}^2$ に比例するという結果は，以下の議論から当然の帰結であることがわかる．連続理論でゲージ不変な次元 4 の項は CP 不変性を要請すれば $\mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}^2$ しかない．今，格子作用をゲージ不変に作ったのだから，それを a で展開したら各次数でゲージ不変になっているはずであり，その最低次は必ず $\mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}^2$ になっている．このことは任意のループを含む一般の作用でも同じであり，各ループの係数を適当に調節すれば連続理論の作用を再現できる．例えば，プラケットだけでなく，1×2 の長方形を格子作用に含めても連続極限で $\mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}^2$ になることは付録 B で議論しているので興味のある方は参照して欲しい．

§4.2.3　経路積分

作用を決めたので，格子理論の分配関数を与えよう．

$$Z = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} e^{S_G} = \int \prod_{n,\mu} dU_{n,\mu} \exp\left[\frac{1}{g^2}\sum_{n,\mu\neq\nu} \mathrm{tr}\, U_{\mu\nu}(n)\right] \quad (4.2.19)$$

ここで，dU は群上の不変測度 (Haar measure) であり，

$$d(VU) = d(UV) = dU \qquad ({}^{\forall}V \in \mathrm{SU(N)}) \quad (4.2.20)$$

を満たす．

ここで，格子ゲージ理論における摂動展開について考えよう．$U_{\mu\nu}(n)$ が SU(N) の元であることから

$$\mathrm{Re}\ \mathrm{tr}\ U_{\mu\nu}(n) \leq \mathrm{tr}\ \mathbf{1} \quad (4.2.21)$$

が言える．したがって，$g^2 \to 0$ の極限（弱結合極限）ではすべての $U_{\mu\nu}(n)$ に対して

$$U_{\mu\nu}(n) = 1 \quad (4.2.22)$$

となる．境界条件を気にしなくてよい無限体積の極限の場合，この条件は

$${}^{\forall}U_{n,\mu} = \omega(n)\omega(n+\mu)^{\dagger} \quad (4.2.23)$$

と等価である．この場合はゲージ変換として $g_n = \omega(n)^{\dagger}$ を選べば，全てのリンク変数を

$${}^{\forall}U_{n,\mu} = 1 \quad (4.2.24)$$

と置くことができる．このことから，摂動展開 (g^2 の展開) でリンク変数を

$$U_{n,\mu} = e^{iagA_{\mu}(n+\hat{\mu}/2)} \quad (4.2.25)$$

と置いていた今までの計算方法が正当化される．

§4.3　エリッツァー (Elitzur) の定理と観測量

§4.3.1　エリッツァー (Elitzur) の定理

格子理論上の局所ゲージ対称性をもった理論では，ゲージ不変でない演算子の期待値はゼロであることが証明できる．これがエリッツァーの定理である．このことは,「(格子理論では) 局所ゲージ対称性は自発的には破れない」

ことを意味し，したがって，全ての観測可能な物理量はゲージ不変なものに限られ，ゲージ場しかない場合は tr O_Γ とかかれる演算子の組み合わせから作られる．ここで Γ は任意の閉じたループである．

エリッツァーの定理を簡単な例である Z_2 ゲージ理論を使って「証明」していこう．

対称性が局所的 (Local) であることの重要性をみるために，対称性が大域的 (Global) の場合を初めに考える．この場合はスカラー場 σ_n は

$$\forall n \qquad \sigma_n \quad \to \quad -\sigma_n \tag{4.3.1}$$

と変換するので，σ に対する外場 H がある場合の，σ_n の真空期待値は

$$\begin{aligned} \langle\sigma_n\rangle_H &= \int \mathcal{D}\sigma e^{-S+H\sum_n \sigma_n}\ \sigma_n \\ &= \frac{1}{2}\int \mathcal{D}\sigma e^{-S}\sigma_n\left[e^{H\sum_n\sigma_n} - e^{-H\sum_n\sigma_n}\right] \\ &= \frac{1}{2}\int \mathcal{D}\sigma e^{-S+H\sum_n\sigma_n}\sigma_n(1-e^{-2H\sum_n\sigma_n}) \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

となる．ここで $V\to\infty$ と無限体積極限をとると，もし $\sum_n \sigma_n = O(V) > 0$ であれば，$H(>0)$ の値に関わらず，最後の式で第 2 項が第 1 項を打ち消してしまうことはない．したがって，

$$\lim_{H\to 0}\langle\sigma\rangle_H \quad = \quad 0 \tag{4.3.3}$$

ということを証明することはできない．実際，大域的対称性の場合は自発的破れが可能であり，その場合は左辺の値がゼロでなくなっている．

次に作用の対称性が以下のように局所的であるときを考える．

$$\sigma_n \quad \to \quad -\sigma_n \tag{4.3.4}$$

$$\sigma_{m\neq n} \quad \to \quad \sigma_m \tag{4.3.5}$$

実際のゲージ理論の場合はもう少し複雑になるが，議論を簡単にするために，上のようになっていると考える．ここでは，この対称性を実現する作用 S の具体形を考えないのでこのように簡単化しても一般性は失われない．(ゲージ理論の場合のきちっとした証明は付録 C に与えておく．) このとき，外場がある時に σ_n の真空期待値は

$$\lim_{V\to\infty}\langle\sigma_n\rangle_H = \int\mathcal{D}\sigma e^{-S+H\sum_n\sigma_n}\sigma_n \tag{4.3.6}$$
$$= \frac{1}{2}\int\mathcal{D}\sigma e^{-S+H\sum_n\sigma_n}\sigma_n(1-e^{-2H\sigma_n}) \tag{4.3.7}$$

となる．無限体積の極限でも $\sigma_n = O(1)$ なので，その極限のあとで，外場をゼロにすれば，

$$\lim_{H\to 0}\lim_{V\to\infty}\langle\sigma_n\rangle_H = \lim_{H\to 0}O(H) = 0 \tag{4.3.8}$$

となる．つまり，(局所）ゲージ対称性は自発的には破れないことが言えたわけだ．これがエリッツァーの定理の「証明」である．

§4.3.2　ゲージ理論の観測量 I：ウィルソン・ループ

ウィルソン・ループ (Wilson loop) は格子ゲージ理論の基本的な観測量であり，次のように定義される．

$$W(C = L\times T) = \mathrm{tr}\left[\prod_{i\in C}U_i\right] \tag{4.3.9}$$

ここで閉じたループ C は $L\times T$ の長方形である．(図 4.2 を参照.）このウィルソン・ループの物理的な意味を考えていこう．T の方向を「時間」と考えると，時間一定の面には SU(N) ゲージ群の表現が N と $\bar{N}$ の 2 つの場が距離 L だけ離れている状態になっている．N の状態はクォーク，$\bar{N}$ の状態は反クォークと考えられる．ここでは，このクォーク，反クォークは非常に重く空間の 1 点に止まっているため，時間が進んでも両者の距離 L は変わらないと考えている．T を十分大きくすると，

$$\langle W(C)\rangle \to \exp[-TV(L)], \qquad T\to\infty \tag{4.3.10}$$

と振舞うはずであり，ここで $V(L)$ はクォーク・反クォークの静的ポテンシャルである．つまり，$T\times L$ の閉じたループの物理的意味は，(重い）クォークと反クォークがある時間に対生成して，(瞬間的に）距離 L まで引き離され，それ以後は空間に固定され，時間 T だけ過ぎたところで再び対消滅したということである．T を大きくすれば，対生成・対消滅の部分の影響は単なる定数になるので，ウィルソン・ループの真空期待値の指数的な減衰から $V(L)$

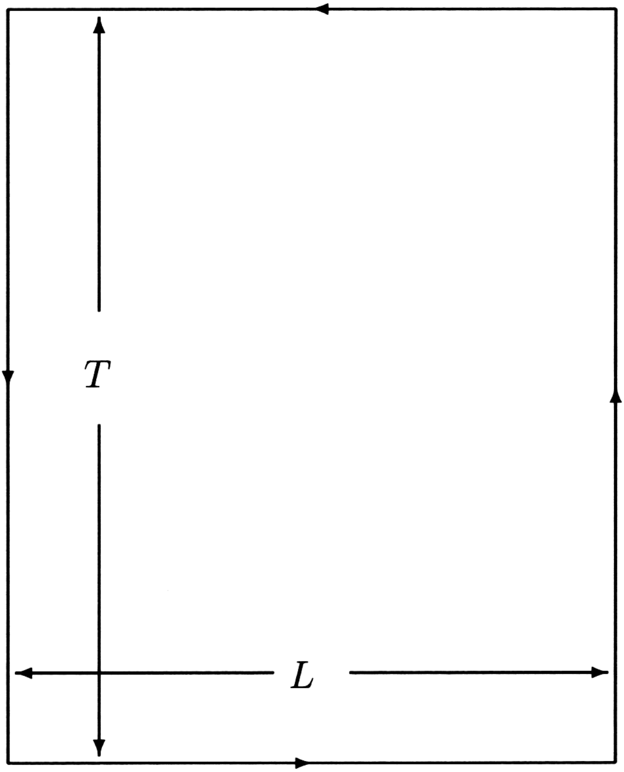


図 4.2：ウィルソン・ループ.

を引き出すことができる．上で述べたウィルソン・ループの物理的意味を格子作用の経路積分から導くためには，格子上のクォークに対する作用が必要であるので，後の章に譲ることにする．

ウィルソン・ループの真空期待値の振る舞いと $V(L)$ の振る舞いの関係を見てみよう．

ウィルソン・ループの真空期待値が次のように振舞う場合を「面積則」(area law) に従うという．

$$\langle W(C)\rangle \quad \rightarrow \quad \exp[-cLT] \tag{4.3.11}$$

この時，静的ポテンシャルは

$$V(L) \;=\; cL \tag{4.3.12}$$

となるが，これは（L の）線型増加なポテンシャルと呼ばれる．この場合は，クォーク・反クォーク対を引き離そうとすると，その距離に比例してポテンシャル・エネルギーが増えていく．このことはクォークの閉じ込めを意味するので，閉じ込めポテンシャルと考えられる．また，線型増加ポテンシャルの係数 c は弦模型の弦張力 (string tension)σ と

$$c \;=\; \sigma a^2 \tag{4.3.13}$$

のような関係がある．

「面積則」ではない，ウィルソン・ループの次のような振る舞いを「周辺則」(perimeter law) と呼ぶ．

$$\langle W(C)\rangle \to \quad \exp \quad [-c'(L+T)] \tag{4.3.14}$$

この時

$$V(L) \;=\; c'(1+\frac{L}{T}) \to c' \quad (T\to\infty) \tag{4.3.15}$$

となるので，$L\to\infty$ でもポテンシャルは有限になり，クォークと反クォークを (無限に) 引き離すことが可能になる．つまり，クォークの閉じ込めが起こらないわけである．

以上のことから，ウィルソン・ループ（の期待値）は閉じ込め・非閉じ込めを区別する一種の「秩序変数」(order parameter) であるといえる．

§4.3.3　ゲージ理論の観測量 II：グルーボール

ゲージ場のみから出来ているゲージ不変な状態に対応する粒子をグルーボール (glue ball) と呼ぶ．これは，SU(3) ゲージ場がグルーオンと呼ばれていることからきている．グルーボールを記述する一番簡単な格子上の演算子は

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}(n) = \mathrm{tr}\ \ U_{\mu\nu}(n) \tag{4.3.16}$$

で与えられる．上の演算子を特定の J^{PC} に射影すればその J^{PC} を持ったグルーボールを記述することができる．グルーボールの質量はスカラー場の時と同様に

$$\sum_{\vec{n}} \langle P(J^{PC})^{\mu\nu} \mathcal{O}_{\mu\nu}(\vec{0},0) P(J^{PC})^{\mu'\nu'} \mathcal{O}_{\mu'\nu'}(\vec{n},t) \rangle \sim Z e^{-m_G(J^{PC})t} \tag{4.3.17}$$

とゼロ運動量での2点関数を計算し，その時間に関する減衰から求めることができる．ここで，$P(J^{PC})^{\mu\nu}$ は $\mathcal{O}_{\mu\nu}$ を J^{PC} に射影する演算子で，$m_G(J^{PC})$ はその状態に対応するグルーボールの質量である．

格子ゲージ理論はグルーボールの存在とその質量を予言するが，実験的にはグルーボールは未だに観測されていない．格子ゲージ理論の数値計算によるグルーボール質量の評価は文献 [22] を参照して欲しい．

§4.3.4 ゲージ理論の観測量 III：ポリャコフ・ループ

$L^3 \times T$ の大きさの格子空間を考える．ここでは L,T は整数である．T の方向を時間と考え，その方向には周期的境界条件をとる．このとき，ポリャコフ・ループ (Polyakov loop) と呼ばれる演算子は次のように定義される．

$$P(\vec{n},T) = \mathrm{tr} \left[U_4(\vec{n},0) U_4(\vec{n},1) \cdots U_4(\vec{n},T) \right]. \tag{4.3.18}$$

つまり，時間方向のリンク変数を時間の始めから終わりまで掛け合わせたもので，周期的境界条件なのでこの演算子がゲージ不変であることがわかる．

ポリャコフ・ループの物理的意味を考えよう．F_q は単独のクォーク1つを生成するのに必要な自由エネルギーとすると，

$$F_q = -\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \log \frac{\langle 0|q(\vec{n},T)q(\vec{n},0)^\dagger|0\rangle}{\langle 0|0\rangle} \tag{4.3.19}$$

と定義される．ここで，$q(\vec{n},n_t)$, $q(\vec{n},n_t)^\dagger$ は時空格子点 $(\vec{n},n_t)$ でクォークを消滅，生成させる演算子で，$|0\rangle$ は真空状態である．次の章で見るように，格子上でフェルミオン場であるクォークが格子点 n から $n+\hat{\mu}$ に移動すると，2点を結ぶリンク上のリンク変数 $U_{n,\mu}$ が現われる．したがって，

$$\begin{aligned} \langle 0|q(\vec{n},T)q(\vec{n},0)^\dagger|0\rangle &= \int \mathcal{D}U \sum_{\{C|\ \text{all pathes from } (\vec{n},0) \text{ to } (\vec{n},T)\}} \\ &\times Z_C \Pi_{i\in C} U_i \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

となる．ここで Z_C は経路 C に依存した定数である．クォークが非常に重い場合，エネルギー的には空間的に動かない方が得であり，このような場合を

スタティック（静的）クォークと呼ぶ．上の場合ではちょうど $(\vec{n},0)$ と $(\vec{n},T)$ を結ぶ時間方向に伸びた最短の直線になる．そこで，時間方向を周期的にとり，その大きさを T として $(\vec{n},0)$ と $(\vec{n},T)$ を同一視すると静的クォークの場合はポリャコフ・ループの寄与が主になる．したがって，左辺と右辺を比べると，T が充分大きい時のポリャコフ・ループ（の真空期待値）は

$$P(n) \quad \equiv \quad \langle P(\vec{n},T)\rangle = Ze^{-F_q(\text{ static })T} \tag{4.3.21}$$

となることがわかる．ここで，$F_q(\text{ static })$ は単独の静的クォーク 1 つを生成するのに必要な自由エネルギーである．

以上の物理的考察から

$$\begin{cases} P(T)=0 & \Rightarrow \quad F_q(\text{ static })=\infty \quad \Rightarrow \quad \text{クォークの閉じ込め} \\ P(T)\neq 0 & \Rightarrow \quad F_q(\text{ static })\neq\infty \quad \Rightarrow \quad \text{クォークの非閉じ込め} \end{cases} \tag{4.3.22}$$

という対応がある．つまり，ポリャコフ・ループの真空期待値 $P(T)$ は閉じ込め・非閉じ込めを区別する「秩序変数」である．

実は，格子ゲージ理論には $P(T)=0$ を導く以下のような対称性が存在する．時間座標 t のみに依存して空間座標 $\vec{n}$ に依存しない大域的な変換

$$U_4(\vec{n},t)\rightarrow\Omega_t U_4(\vec{n},t) \tag{4.3.23}$$

を考えると，格子作用はこの変換に対して不変である．ここで，Ω_t はゲージ群 SU(N) のセンター（SU(N) の任意の元と可換な部分群）Z_N に属する元である．したがって，対称性は大域的 Z_N である．この変換に対して閉じたループ上のリンク変数の積は不変であることは容易にわかる．なぜなら，閉じたループ上の積には $U_4(\vec{n},t)$ があれば必ず $U_4(\vec{n'},t)^\dagger$ を含む．したがって，Z_N 変換では

$$\begin{aligned} \cdots\Omega_t U_4(\vec{n},t)\cdots U_4(\vec{n'},t)^\dagger\Omega_t^\dagger\cdots &= \Omega_t\Omega_t^\dagger\cdots U_4(\vec{n},t)\cdots U_4(\vec{n'},t)\cdots \\ &= \cdots U_4(\vec{n},t)\cdots U_4(\vec{n'},t)\cdots \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

となり，不変であることは明らかである．したがって，もちろん作用 S_G も Z_N 不変である．しかしながら，

$$P(\vec{n},T) \to \Omega_t P(\vec{n},T) \tag{4.3.25}$$

なのでポリャコフ・ループは不変ではない．したがって，Z_N 対称性が保たれている限り $P(T)=0$ がいえる．逆に $P(T)\neq 0$ となることは大局的 Z_N 対称性が自発的に破れていることを意味する．つまり，$P(T)$ は Z_N 対称性の秩序変数になっているわけである．

2 つのポリャコフ・ループの相関関数もゲージ理論の観測量になる．相関関数は（$|\vec{n}-\vec{m}|$ が大きければ）

$$\langle P(\vec{n},T)P(\vec{m},T)^\dagger\rangle \quad \sim \quad e^{-\mu(T)|\vec{n}-\vec{m}|} \tag{4.3.26}$$

と振舞う．ここで $\mu(T)$ はトレロン質量とよばれる量で，T が有限の時の弦の張力は

$$\sigma(T) \quad = \quad \frac{\mu(T)}{T} \tag{4.3.27}$$

定義できる．そして，T が十分大きい時にはウィルソン・ループから決めた σ とは

$$\sigma \quad \simeq \quad \sigma(T)+\frac{\pi}{3T^2} \tag{4.3.28}$$

の関係にある．

§4.4 強結合展開 (Strong Coupling Expansion) とクォークの閉じ込め

この節では格子ゲージ理論における展開の 1 つである強結合展開を使って，格子ゲージ理論の閉じ込めについて議論する．

§4.4.1 SU(N) 群積分

はじめに群の不変測度を使って SU(N) の群積分の公式を導く．まず，定数の積分は不変測度の性質から明らかにゼロでない定数なので，

$$\int dU\,1 \quad = \quad 1 \tag{4.4.1}$$

と規格化しておく．次に

$$\int dU\, U_{ab} \quad = \quad A_{ab} \tag{4.4.2}$$

を計算する．不変測度の性質から

$$A_{ab} \quad = \quad (VA)_{ab}, \forall V \in \text{ SU(N)} \tag{4.4.3}$$

となるから，$A_{ab} = 0$ が言える．

次に

$$\int dU\, U_{ab} U^{\dagger}_{kl} \quad = \quad T_{ab,kl} \tag{4.4.4}$$

$$\tag{4.4.5}$$

を考える．$U \to L\ U\ R$ という変換に対する不変性から

$$T_{ab,kl} \quad = \quad L_{ac} L^{\dagger}_{nl} T_{cd,mn} R_{db} R^{\dagger}_{mk}, \forall L, R \in \text{ SU(N)} \tag{4.4.6}$$

が言えるので，$T_{ab,kl}$ は群の添字 (a, l)，(b, k) のそれぞれの組に関して独立に SU(N) 不変でなければならない．したがって，

$$T_{ab,kl} \quad = \quad c\, \delta_{al} \delta_{bk} \tag{4.4.7}$$

となる．ここで，$b = k$ として添字の和をとり両辺を比べると $c = \dfrac{1}{N}$ がわかる．

同様に，積分の不変性から添字で SU(N) 不変なテンソルを作ると

$$\int dU\, U_{a_1,b_1} U_{a_2,b_2} \cdots U_{a_N,b_N} \quad = \quad c\, \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_N} \epsilon_{b_1 b_2 \cdots b_N} \tag{4.4.8}$$

となるが，両辺に $\epsilon_{b_1 b_2 \cdots b_N}$ を掛けて添字に関する和をとると，

$$\int dU\, \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_N} \det U \quad = \quad \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_N} = c\, \epsilon_{a_1 a_2 \cdots a_N} N! \tag{4.4.9}$$

から，$c = \dfrac{1}{N!}$ である．また，

$$\int dU U_{a_1,b_1} U_{a_2,b_2} \cdots U_{a_M,b_M} \quad = \quad 0, \qquad M \neq 0 \ (\text{mod}\ \ N) \tag{4.4.10}$$

も言える．

最後に

$$\int dU\, U_{ab}U_{cd}U^{\dagger}_{ij}U^{\dagger}_{kl} = c_0\left[\delta_{aj}\delta_{bi}\delta_{cl}\delta_{dk}+\delta_{al}\delta_{bk}\delta_{cj}\delta_{di}\right] + c_1\left[\delta_{aj}\delta_{bk}\delta_{cl}\delta_{di}+\delta_{al}\delta_{bi}\delta_{cj}\delta_{dk}\right] \quad (4.4.11)$$

を考える．添字の組み合わせは，SU(N) 不変性と $U_{ab} \leftrightarrow U_{cd}$ の入れ換え対称性から決まる．ここで，$c = j, d = i$ と置いて添字の和を取る場合と $b = i, j = c$ と置いて和をとる場合を考えると，

$$\begin{aligned}(N^2+1)c_0 + 2Nc_1 &= 1\\ 2Nc_0 + (N^2+1)c_1 &= \frac{1}{N}\end{aligned} \quad (4.4.12)$$

となるから，これを解いて，$c_0 = \dfrac{1}{N^2-1}, c_1 = -\dfrac{c_0}{N}$ が求まる．

以上の結果を公式にまとめると以下のようになる．

$$\int dU 1 = 1 \quad (4.4.13)$$

$$\int dU U_{ab} = 0 \quad (4.4.14)$$

$$\int dU U_{ab}U^{\dagger}_{kl} = \frac{1}{N}\delta_{al}\delta_{bk} \quad (4.4.15)$$

$$\int dU U_{a_1,b_1}U_{a_2,b_2}\cdots U_{a_N,b_N} = \frac{1}{N!}\epsilon_{a_1a_2\cdots a_N}\epsilon_{b_1b_2\cdots b_N} \quad (4.4.16)$$

$$\int dU U_{a_1,b_1}U_{a_2,b_2}\cdots U_{a_M,b_M} = 0, \quad M\neq 0 \ (\mod N\ ) \quad (4.4.17)$$

$$\int dU U_{ab}U_{cd}U^{\dagger}_{ij}U^{\dagger}_{kl} = \frac{1}{N^2-1}\Big[\delta_{aj}\delta_{bi}\delta_{cl}\delta_{dk}+\delta_{al}\delta_{bk}\delta_{cj}\delta_{di} - \frac{1}{N}(\delta_{aj}\delta_{bk}\delta_{cl}\delta_{di}+\delta_{al}\delta_{bi}\delta_{cj}\delta_{dk})\Big]. \quad (4.4.18)$$

この公式のうち，式 (4.4.15,4.4.16) を図形的に表現したものを図 4.3 に，式 (4.4.18) を図形的に表現したものを図 4.4 に載せておく．

§4.4.2 強結合展開 (Strong Coupling Expansion) とウィルソン・ループ

さて，強結合展開を定式化しよう．格子ゲージ理論の作用は

$$S = \frac{1}{g^2}\sum_{n,\mu\neq\nu} \mathrm{tr}\ U_{\mu\nu}(n) \quad (4.4.19)$$

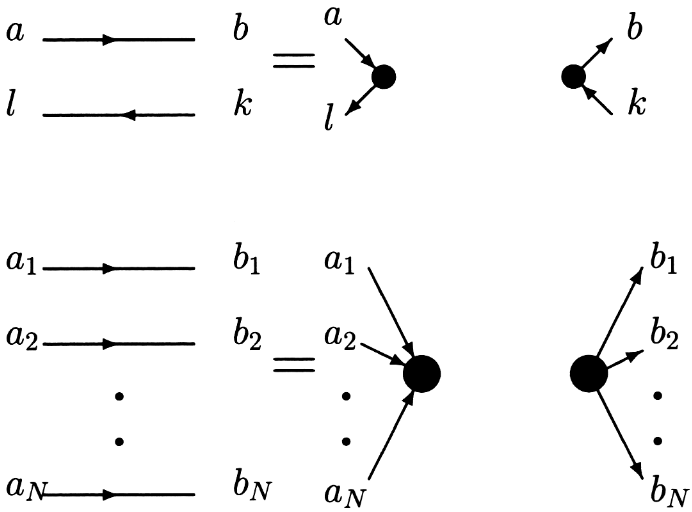


図 4.3：SU(N) 群積分の公式の図形的な表現．ここで右向きの矢印つきの線は U を，左向きの矢印つきの線は $U^\dagger$ をそれぞれ意味している．左側の図は式 (4.4.15) を表現したもので，2 本の矢印つきの線が附いた小さな黒丸はクロネッカーのデルタ記号を意味する．右側の図は式 (4.4.16) を表現したもので，N 本の矢印つきの線が附いた大きな黒丸は N 階の完全反対称テンソルを意味する．

で与えられる．ここで，$U_{\mu,\nu}(n)$ は前に定義したようにプラケットを表わす．g^2 が大きい時には

$$e^S = \Pi_{n,\mu\neq\nu}\left[1+\frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\,U_{\mu,\nu}(n)+\cdots\right] \tag{4.4.20}$$

と展開できる．この式と SU(N) の群積分を組み合わせることで強結合展開ができる．特に，強結合では「ゲージ場の配位はランダム」ということが，

$$\int dU\,U = 0 \tag{4.4.21}$$

という積分の性質で表わされている．

強結合展開の練習問題としてウィルソン・ループの期待値を計算してみよう．点 n から始まる 1 方向と 4 方向のウィルソン・ループを

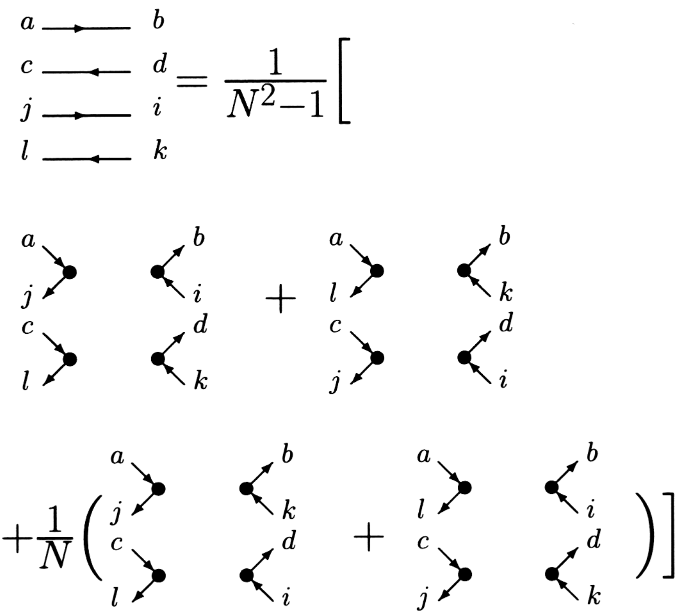


図 4.4：SU(N) 群積分の公式 (4.4.18) の図形的な表現.

$$W(C) \quad = \quad \mathrm{tr}\, U_{n,1} \overbrace{U_{n+\hat{1}} \cdots}^{\hat{W}} U_{n,4}^{\dagger} \tag{4.4.22}$$

という形に書く．ここで，$U_{n,1}$，$U_{n,4}$ はウィルソン・ループの始点 n にある 1 方向と 4 方向のリンク変数で $\hat{W}$ はそれ以外のリンク変数の積である．$U_{n,1}$ を考えると，(SU(2) 以外は) 最低でももう 1 つの $U_{n,1}^{\dagger}$ がないかぎり積分するとゼロになってしまう．$Un,1^{\dagger}$ はゲージ作用を展開して現れたプラケットによって供給される：

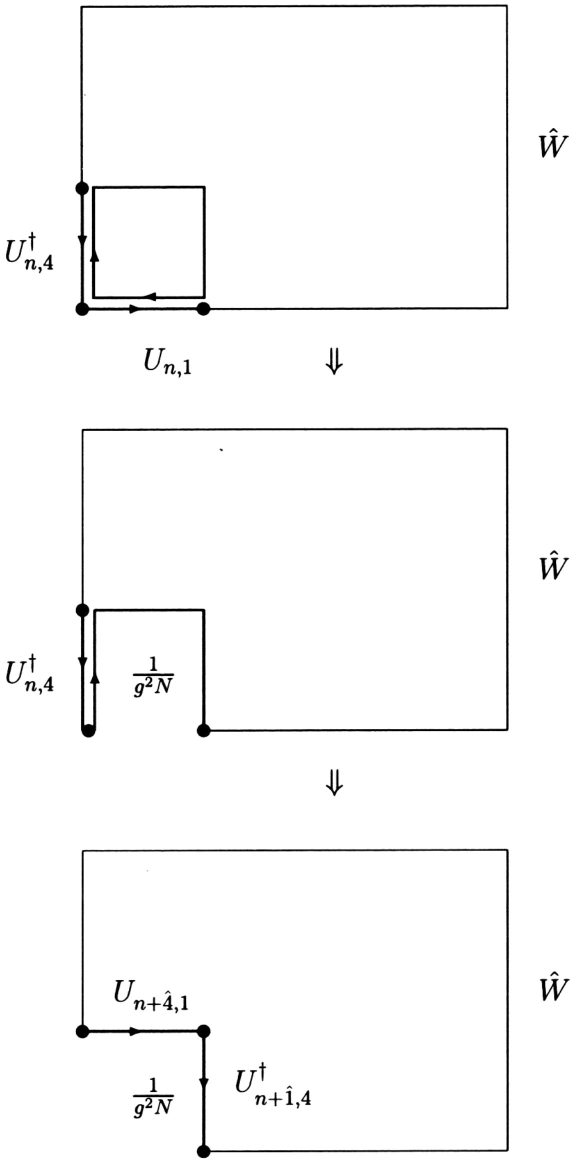


図 4.5：強結合展開によるウィルソン・ループの変形.

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{g^2}\int dU_{n,1}dU_{n,4}\mathrm{tr}\ U_{n,4}U_{n+\hat{4},1}U^\dagger_{n+\hat{1},4}U^\dagger_{n,1} \\
\times\quad & \mathrm{tr}\ U_{n,1}\hat{W}U^\dagger_{n,4} = \frac{1}{g^2}\int dU_{n,4}\{U_{n,4}U_{n+\hat{4},1}U^\dagger_{n+\hat{1},4}\}_{lk} \\
\times\quad & \int dU_{n,1}\{U^\dagger_{n,1}\}_{kl}\{U_{n,1}\}_{ab}\{\hat{W}U^\dagger_{n,4}\}_{ba} \\
=\quad & \frac{1}{g^2N}\int dU_{n,4}\mathrm{tr}\ U_{n,4}U_{n+\hat{4},1}U^\dagger_{n+\hat{1},4}\hat{W}U^\dagger_{n,4} \\
=\quad & \frac{1}{g^2N}\mathrm{tr}\ U_{n+\hat{4},1}U^\dagger_{n+\hat{1},4}\hat{W}
\end{aligned} \tag{4.4.23}
$$

この様子を図示したものが図 4.5 である．この操作を繰り返すと

$$
\begin{aligned}
\langle W(T\times L)\rangle &= (\frac{1}{g^2N})^L\langle W((T-1)\times L)\rangle = (\frac{1}{g^2N})^{LT-1}\langle W(1\times 1)\rangle \\
&= (\frac{1}{g^2N})^{LT}\mathrm{tr}\ 1 = N(\frac{1}{g^2N})^{LT}
\end{aligned} \tag{4.4.24}
$$

が得られる．したがって，最終的に

$$
\langle W(T\times L)\rangle = Ne^{-TL\log(g^2N)} \tag{4.4.25}
$$

となり，強結合展開では，ウィルソン・ループの真空期待値が面積則を満たすことが示された．したがってクォークは閉じ込められている．また，静的ポテンシャルは

$$
V(L) = L\log(g^2N) \tag{4.4.26}
$$

となるので，弦の張力は $\sigma = \frac{1}{a^2}\log(g^2N)$ で与えられる．

§4.4.3 キャラクター展開

強結合展開の高次の計算はかなり複雑であるが，ここでは比較的容易に強結合展開を行う方法であるするキャラクター展開を紹介する．

SU(N) を考える．その群の元を U とする．既約表現 R での U の表現を $U(R)$ とする．この時，以下の公式が成り立つ．

$$
\exp[\frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\ (U_p+U_p^\dagger)] = \sum_R d_R\lambda_R(1/g^2)\chi_R(U_p) \tag{4.4.27}
$$

ここで，$d_R = \mathrm{dim}R$ は既約表現 R の次元であり，例えば 1(恒等表現)，F(基

本表現)，A(随伴表現) に対して

$$d_R = \begin{cases} 1 & R=1 \\ N & R=F \\ N^2-1 & R=A \end{cases} \tag{4.4.28}$$

となる．また，表現 R のキャラクター χ_R や展開係数 λ_R は以下で定義される．

$$\chi_R(U) = \mathrm{tr}\ U(R), \qquad d_R = \chi_R(1) \tag{4.4.29}$$

$$\lambda_R(1/g^2) = \frac{1}{d_R}\int dU \chi_R(U) \exp[\frac{1}{g^2}\mathrm{tr}\ (U+U^\dagger)] \tag{4.4.30}$$

この定義から

$$0 \leq \lambda_R(1/g^2) \leq 1 \tag{4.4.31}$$

が言える．ここで，$\lambda_R(1/g^2) = 1$ となるのは $g^2 = 0$ の時だけである．

強結合展開のところで紹介した群積分の公式は任意の表現 R で成り立つ．

$$\int dU U_{ab}(R) U^\dagger_{kl}(R') = \frac{1}{d_R}\delta_{RR'}\delta_{al}\delta_{bk} \tag{4.4.32}$$

この式から，以下の有用な積分の公式

$$\int d\Omega\, \chi_R(U\Omega)\chi_{R'}(\Omega^\dagger W) = \frac{1}{d_R}\delta_{RR'}\chi_R(UW) \tag{4.4.33}$$

$$\int d\Omega\, \chi_R(A\Omega B\Omega^\dagger) = \frac{1}{d_R}\chi_R(A)\chi_R(B) \tag{4.4.34}$$

が導かれる．前節のウィルソン・ループの強結合展開の計算では，R が基本表現の場合のこの公式が多用されていた．

§4.4.4　2次元の格子ゲージ理論

キャラクター展開の有用性を見るために，格子上の2次元の非可換ゲージ理論のウィルソン・ループの期待値と分配関数を厳密に計算してみる．

今，閉じたループ C 上のリンク変数の（順番を保った）積を

$$\Gamma = \prod_{i\in C} U_i \tag{4.4.35}$$

と定義する．そして，ループ内部のリンク変数を積分した以下の量を導入する．

$$K_A(\Gamma) = \int \prod_{i\in C_{\rm in}} dU_i \; e^S \tag{4.4.36}$$

ここで，A はループ C の面積，$C_{\rm in}$ はループの内部であり，作用 S は全体の作用ではなく，ループ C を覆うのに必要な最低限のプラケットのみの和を意味している．

K_A を小さなループから順番に計算していこう．1×1 のループ（プラケット）は内部のリンク変数がないので $K_1 = e^S$ である．1×2 のループ p_{12} を考え，内部のリンク変数を Ω とし，それを含む 2 つのプラケット p_1，p_2 上のリンク変数の積を U_{p_1}，U_{p_2} とする．この時，

$$\begin{aligned} U_{p_1} &= U_1\Omega, \\ U_{p_2} &= \Omega^\dagger U_2 \end{aligned} \tag{4.4.37}$$

と置くと，K_A は以下のように計算される．

$$\begin{aligned} K_2(p_{12}) &= \int d\Omega K_1(p_1)K_1(p_2) = \sum_{R,R'} d_R d_{R'}\lambda_R\lambda_{R'}\chi_R(U_1\Omega)\chi_{R'}(\Omega^\dagger U_2)d\Omega \\ &= \sum_R d_R\lambda_R^2\chi_R(U_1U_2) \end{aligned} \tag{4.4.38}$$

ここでは K_1 を計算するのにキャラクター展開（式 4.4.27）を用い，また，群積分を実行するの積分公式を使っている．この変形を繰り返すと

$$K_A(\Gamma) = \sum_R d_R\lambda_R^A\chi_R(\Gamma) \tag{4.4.39}$$

という表式が得られる．

この結果を用いると表現 R のウィルソン・ループの期待値が計算できる．この計算は，ウィルソン・ループと同じ平面内のリンク変数のみを積分しているので，3 次元以上では強結合展開の 1 部を与える近似になってしまうが，2 次元では厳密な答えになっている．考えているウィルソン・ループのリンク変数を Γ とすると，

$$\langle\chi_R(\Gamma)\rangle = \int d\Gamma\, \chi_R(\Gamma) \sum_{R'} d_{R'}\lambda_{R'}^A\chi_{R'}(\Gamma^\dagger) = d_R\lambda_R^A \tag{4.4.40}$$

となる．$g^2 \neq 0$ に対しては $\lambda_R(1/g^2) < 1$ が言えるので，この結果はすべて

の表現 R に対して面積則を示していることになり，2 次元の格子ゲージ理論では任意の表現 R を持つ粒子は閉じ込められることを意味している．ゲージ群が SU(2) の場合はスピン j 表現 (次元は $2j+1$) に対して

$$\lambda_j(1/g^2) \quad = \quad \frac{I_{2j+1}(4/g^2)}{4/g^2} \tag{4.4.41}$$

となる．ここで $I_k(z)$ は k 次の (変形された) ベッセル関数であり，整数 k に対して

$$I_k(z) \quad = \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\theta\, \cos(k\theta)\, e^{z\cos\theta} \tag{4.4.42}$$

で与えられる．

2 次元の格子ゲージ理論の分配関数を周期的境界条件の場合に計算しよう．$L \times T$ の 2 次元空間の境界以外の変数をすべて積分したとすると，

$$\chi_R(\Gamma) \quad = \quad \chi_R(ABA^\dagger B^\dagger) = \chi_R(U_A\hat{A}B\hat{A}^\dagger U_A^\dagger B^\dagger) \tag{4.4.43}$$

となる．A は $t=0$ の x 方向のリンクの積，B は $x=L$ の t 方向のリンクの積である．周期的境界条件から $t=T$，$x=0$ でのリンクの積はそれぞれ $A^\dagger$，$B^\dagger$ になる．A の中の最初のリンク変数を U_A とし，$A \equiv U_A\hat{A}$ と置き，U_A を積分すると，

$$\int dU_A\chi(\Gamma) \quad = \quad \frac{1}{d_R}\chi_R(\hat{A}B\hat{A}^\dagger)\chi_R(B^\dagger) = \frac{1}{d_R}\chi_R(B)\chi_R(B^\dagger) \tag{4.4.44}$$

となる．同様に B 上のリンク U_B を積分すると最終的に

$$\begin{aligned} Z \quad &= \quad \sum_R d_R\lambda_R^A\frac{1}{d_R}\int dB\chi_R(B)\chi_R(B^\dagger) \\ &= \quad \sum_R \lambda_R^A\int dU_B\chi_R(U_B\hat{B})\chi_R(\hat{B}^\dagger U_B^\dagger) = \sum_R\frac{\lambda_R^A}{d_R}\chi_R(\hat{B}\hat{B}^\dagger) \\ &= \quad \sum_R \lambda_R^A \end{aligned} \tag{4.4.45}$$

が得られる．ここで，$A = L \times T$ である．この理論の無限体積での自由エネルギーは

$$F \quad = \quad -\lim_{A\to\infty}\frac{1}{A}\log Z = -\log\max_R \lambda_R(1/g^2) \tag{4.4.46}$$

で与えられる．$\lambda_R(1/g^2)$ は 1 つのリンクの積分から求められ，その表式から明らかに $1/g^2$ の解析関数である．したがって，2 次元の格子ゲージ理論では $1/g^2 = \infty$（つまり $g^2 = 0$）以外には特異点はないことがわかる．このことは，2 次元では $g^2 \neq 0$ で任意の表現 R のウィルソン・ループが面積則を示すこと，つまりその表現の粒子が閉じ込められている，という先程示した事実と対応している．

§4.5　連続極限への近づき方（スケーリングの振る舞い）

§4.5.1　β 関数と格子間隔

非可換ゲージ理論の場合，ゲージ結合定数はエネルギー・スケールに依存しており，その依存性を与えるのがベータ関数である．ゲージ群が SU(3) の場合のベータ関数は

$$\beta(g) \quad = \quad \mu\frac{d\,g}{d\,\mu} = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + \cdots\,, \tag{4.5.1}$$

で与えられる．この時，

$$b_0 \quad = \quad \frac{11}{16\pi^2} \tag{4.5.2}$$

$$b_1 \quad = \quad \frac{102}{16\pi^2} \tag{4.5.3}$$

である．この微分方程式をエネルギー・スケール $1/a$ から Λ_L まで積分する．

$$\int_{1/a}^{\Lambda_L} \frac{d\,\mu}{\mu} \quad = \quad -\frac{1}{2b_0}\int_{g_0^2}^{\infty} \frac{d\,g^2}{g^4(1+\frac{b_1}{b_0}g^2)} \tag{4.5.4}$$

ただし，Λ_L は結合定数が発散する（つまり，$1/g^2 = 0$ となる）エネルギー・スケールで，(格子) ラムダ・パラメタと呼ばれている．右辺の積分を実行すると，Λ_L で $1/g^2 = 0$ であることから，

$$-\frac{1}{2b_0 g_0^2} - \frac{b_1}{2b_0^2}\log(b_0 g_0^2) + O(1) \quad = \quad \log(\Lambda_L a) \tag{4.5.5}$$

となる．(左辺第 2 項の log の中の定数 b_0 は本来 $O(1)$ の項であるが，通常の定義と合わせるために導入した．) ここでは g_0 を格子上の（裸の）結合定数としている．つまり，$g^2(1/a) = g_0^2$ と，エネルギーが格子上のカットオフ $1/a$ の時の結合定数が作用に現われる裸の結合定数に等しくなるという境界

条件を置いたわけだ．これは，繰り込み群の考え方から自然な境界条件の取り方であることがわかると思う．この式を変形すると

$$\Lambda_L a \quad = \quad (b_0 g_0^2)^{-\frac{b_1}{2b_0^2}} e^{-\frac{1}{2b_0 g_0^2}} \tag{4.5.6}$$

となる．したがって，

$$a \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_0^2 \to 0 \tag{4.5.7}$$

となる．つまり，格子ゲージ理論の連続極限は $g_0^2 = 0$ で定義されることがわかる．これは前に述べた繰り込み群の見方では，$g_0^2 = 0$ が紫外固定点になっていることを意味し，非可換ゲージ理論理論が漸近的自由性を持っていることに対応している．

格子理論では全ての量は無次元に書き直されるので，d_K 次元を持つ物理量 K は結合定数 g_0^2 に対して以下のように振舞うはずである．

$$Ka^{d_K} \quad = \quad C(\Lambda_L a)^{d_K} = Ce^{-\frac{d_K}{2b_0 g_0^2}} + \cdots \tag{4.5.8}$$

物理量の g_0^2 に対するこの振る舞いを (物理量の) スケーリング則と呼ぶ．そして，格子計算ではこの係数 C が物理量に対する「予言」になる．実際は，格子上の計算の連続極限によって得られるものは，このような物理量の（次元を持たない）比である．たとえば，2つの物理量 K_1,K_2 を考える．その次元を d_{K_1},d_{K_2} とすると，格子上の計算で得られる次元を持たない物理量は

$$K_i a^{d_{K_i}} \quad = \quad C_i(\Lambda_L a)^{d_{K_i}} = C_i e^{-\frac{d_{K_i}}{2b_0 g_0^2}} + \cdots, \qquad i = 1, 2 \tag{4.5.9}$$

と振る舞うから，a を消去するような比

$$R \quad \equiv \quad \frac{K_1^{1/d_{K_1}}}{K_2^{1/d_{K_2}}} = \frac{(K_1 a^{d_{K_1}})^{1/d_{K_1}}}{(K_2 a^{d_{K_2}})^{1/d_{K_2}}} = \frac{C_1^{1/d_{K_1}}}{C_2^{1/d_{K_2}}} + \cdots \tag{4.5.10}$$

を求めることができる．実験で K_1 が分かっていれば，この比 R から K_2 が格子理論で計算 (予言) されたことになる．自然界にはエネルギーの絶対的な尺度はないので，何か1つの物理量を持って来てそれによってエネルギーの単位を決める必要があり，その他の物理量はその基本となる物理量の比とし

て与えられる．格子計算ではまさにそのようになっているわけだ．

§4.5.2　連続極限と閉じ込め

4.5.1 で示したように，非可換ゲージ理論の連続極限は結合定数の $g_0^2 \to 0$ という極限で達成される．ここで問題になるのは，強結合展開によって示されたクォークの閉じ込めという性質が連続極限においても成り立つかということである．論理的には次の 2 つの可能性がある．

1. $g_0^2 = \infty$ から $g_0^2 = 0$ までにまったく相転移がない場合．このときは，連続極限においてもクォークの閉じ込めが成り立つ．
2. ある $g_0^2 \neq 0$ で相転移が起こる場合．このときは，連続極限では閉じ込めは成り立たない．

数値的な結果は，1 の場合，つまり連続極限では閉じ込めが成り立つ場合，が正しいことを示唆している．そこで多くの人が 1 を厳密に証明しようと試みたが，未だに成功していない．

強結合展開は指数関数のゼロの回りの展開であり，指数関数の収束半径は無限大なので，有限体積では必ず収束する．この事実を使うと強結合展開は有限の収束半径を持つことが証明できる (文献 [9]) ので，閉じ込めが成り立つ (ゼロでない) 領域が必ず存在する．問題は，その収束半径を決める特異点が実軸上にあるのか，複素平面上の実軸以外にあるのかという点である．特異点が実軸以外であれば，閉じ込めが成り立つ領域と連続極限 ($g_0^2 = 0$) は解析接続でつながるので，1 の場合に相当する．実軸に特異点があるときは 2 の場合に相当するが，このときは特異点は有限個ではなく，無限個存在し，強結合領域と弱結合領域を完全に分離しているはずである. (図 4.6 を参照.) 何故なら，もし実軸の特異点の近傍に有限の特異点しかないとすると，必ず強結合側から弱結合側に解析接続できるので，相転移が存在することと矛盾してしまうからである．実際，有限体積を考えると特異点に対応する分配関数のゼロ点は複素平面の実軸以外に存在するが，体積無限大の極限ではゼロ点の列が実軸上に近づいていき複素平面の 2 つの領域を完全に分離し，実軸上のゼロ点が相転移を起こす点に対応する．例えば，2 次元イジング模型の場

合，有名な Lee-Yang の定理で，ゼロ点が複素平面の1つの円の円周上に分布することが証明できる．一方，相転移がない場合は，体積を無限大にしてもゼロ点の列は実軸上には近づかない．

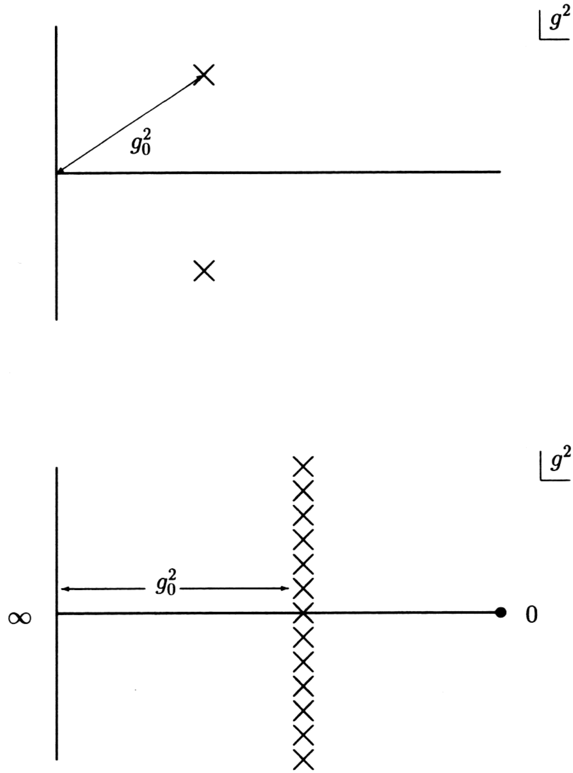


図 4.6：複素 g^2 平面での特異点の分布の可能性．(上) 特異点が実軸上にない場合．この時は $g^2 = \infty$ から $g^2 = 0$ の間に相転移がなく，したがって強結合において成り立っていたクォークの閉じ込めが連続極限 ($g^2 \to 0$) においても成り立つ．(下) 実軸上 $g_0^2 \neq 0$ で相転移が起こっている場合．この時は特異点が実軸上だけでなく複素平面内に無限個存在し，強結合側と弱結合側を完全に分離してしまう．弱結合側では閉じ込めが成り立っていない．(注) いずれの場合でも強結合展開の収束半径は $1/g_0^2$ になる．

第5章

格子フェルミオン

§5.1 単純な格子化とダブラー

§5.1.1 単純な格子フェルミオン

連続理論のフェルミオン作用を考えよう．

$$S_F = \int d^4x\,\bar{\psi}(x)(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi(x) \tag{5.1.1}$$

ここで $\bar{\psi}$, ψ はフェルミ場，$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu$ は共変微分である．この作用はゲージ変換 (4.1.3) に対して不変である．この作用の「格子化」を考えよう．

$$S_F = a^4\sum_n \bar{\psi}_n\left[\sum_\mu \gamma_\mu \frac{U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}} - U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi_{n-\hat{\mu}}}{2a} + m\psi_n\right] \tag{5.1.2}$$

ここで，$U_{n,\mu}$ はゲージ場のリンク変数である．無次元量 $\psi' = a^{3/2}\psi$ と $ma = M$ を使って書き直すと格子フェルミオン作用は

$$S_F = \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}[\bar{\psi}_n\gamma_\mu U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}} - \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu U^\dagger_{n,\mu}\psi_n] + M\sum_n \bar{\psi}_n\psi_n \tag{5.1.3}$$

となる．

§5.1.2 フェルミオン・ダブラー

格子フェルミオン作用の性質をみるために自由場 ($^\forall U_{n,\mu} = 1$) の場合を考える．この時，作用を運動量空間で書き表わすと，

$$S_F = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\bar{\psi}(-p)[i\gamma_\mu \sin p_\mu a + M]\psi(p) \tag{5.1.4}$$

となり，この作用から導かれるフェルミオンの伝搬関数は

$$G_F(p) = \frac{1}{i\not{s}(p)+M} = \frac{-i\not{s}(p)+M}{s^2(p)+M^2}, \tag{5.1.5}$$

で与えられる．ただし，$\not{s}(p)=\sum_\mu \gamma_\mu s_\mu(p) = \sum_\mu \gamma_\mu \sin p_\mu a$ である．この伝搬関数の極は

$$s^2(p)+M^2 = 0 \tag{5.1.6}$$

で与えられ，この条件から粒子の分散関係が決まる．

連続極限（$a \to 0$）を考えると，

$$\sin p_\mu a = \begin{cases} \hat{p}_\mu a & p_\mu = \hat{p}_\mu \\ -\hat{p}_\mu a & p_\mu = \pi/a + \hat{p}_\mu \end{cases} \tag{5.1.7}$$

となるので（ただし，$\hat{p}_\mu \ll 1/a$），伝搬関数は

$$\lim_{a\to 0} G_F(p) = \frac{1}{a}\sum_{p_\mu=0,\pi/a} \frac{-i\sum_\mu(-1)^{\delta_\mu}\gamma_\mu p_\mu + m}{\hat{p}^2+m^2} \tag{5.1.8}$$

となる．ここで，$p_\mu=0$ にたいしては $\delta_\mu=0$，$p_\mu=\pi/a$ に対しては 1 ととっている．場の量子論では伝搬関数の極が粒子を表わすので，上の結果は「1 つの格子フェルミオン場が $2^d=16$ の粒子を記述している」ことを意味している．1 つの次元に対して 0 と π/a の 2 つの極が現れるので，この余計な自由度の粒子をダブラー (doubler)，格子フェルミオンに余分な自由度が現れてしまう問題をダブリング (doubling) 問題と呼ぶ．

§5.1.3　カイラル対称性

少し寄り道になるが，フェルミオンの持つ重要な対称性であり今後しばしば登場するカイラル対称性について説明しよう．

連続理論のフェルミオン作用は

$$\bar{\psi}(\not{D}+m)\psi \tag{5.1.9}$$

であり，その質量がゼロの場合には以下の変換に対して不変になっている．

$$\psi \to \psi' = e^{i\theta\gamma_5}\psi \tag{5.1.10}$$

$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{i\theta\gamma_5} \tag{5.1.11}$$

$m=0$ で作用が不変であることは γ_5 が γ_μ と反可換であることから明らかである．この変換をカイラル変換，フェルミオン作用が不変であることをカイラル対称性と呼ぶ．

次の 5.1.4 で見るように，単純な格子フェルミオンに現われる 2^d 個のダブラー粒子のうち，半分の 2^{d-1} がプラスのカイラル変換性，残りの半分がマイナスのカイラル変換性を持っている．具体的には，

$$\begin{cases} 2^{d-1} \quad \text{chirality } + \quad (|\delta| = \text{even}) \\ 2^{d-1} \quad \text{chirality } - \quad (|\delta| = \text{odd}) \end{cases} \tag{5.1.12}$$

である．

§5.1.4 ニールセン・二宮の定理

1 つの格子場を導入したのに，16 個の粒子を記述しているのは不都合である．なぜなら，低エネルギーに現れる粒子の個数は系の物理的性質に大きな影響を与えるからで，たとえば，非可換ゲージ理論の結合定数のエネルギー依存性を決めるベータ関数は系のフェルミオン数に依存している．SU(3) ゲージ理論である QCD の場合，フェルミオン数が 33/2 より小さければ，漸近的自由な理論であるが，それより大きいと漸近的自由性は失われる．

このような事情なので，格子理論を実際の物理系に適用するには，ダブラーがなく，1 つのフェルミオン粒子を記述する格子フェルミオンの定式化が必要になってくる．しかしながら，ダブリングのない格子フェルミオンの定式化はそう簡単でないことは，以下に紹介する定理（ニールセン・二宮）からわかる．

定理 (ニールセン・二宮)
格子フェルミオンの作用が以下の仮定を満たしているとする．

- (a) 平行移動不変性
- (b) カイラル対称性
- (c) エルミート性
- (d) フェルミ場の双 1 次形式
- (e) 局所性

この時，この格子作用が記述するカイラル変換性が + の粒子と − の粒子の個数は等しくなる．つまり，上の仮定を満たしてる格子フェルミオン作用にはダブリング問題が存在するということである．

定理の証明の概略

定理の仮定である平行移動不変性から格子フェルミオン作用は1つの運動量 p だけの関数となる．また，カイラル対称性と双1次形式から格子作用は

$$S_F = \overbrace{i\bar{\psi}(-p)\underbrace{\gamma_\mu}_{(b)}\underbrace{F^\mu(p)}_{(a)}\psi(p)}^{(d)} \tag{5.1.13}$$

とかける．エルミート性から $F^\mu(p)$ は実関数であり，局所性から $p=0$ で連続であることがいえる．したがって，$F^\mu(p)$ は d 次元トーラス（T^d）上の実ベクトル場である．実ベクトル場については次の定理が成り立つ．

ポアンカレ・ホップ（Poincare-Hopf）の定理

実ベクトル場 $F^\mu(p)$ のゼロ点に対して，F^μ がゼロを横切るときのベクトルが右手系の時，指数を1，左手系の時は指数を −1 とすると，全てのゼロ点での指数の和はベクトル場が定義されている空間のオイラー数に等しい．これがポアンカレ・ホップの定理である．(この定理の詳細に興味のある方は文献 [29] を参照してください.)

d 次元トーラスのオイラー数はゼロであるから，格子フェルミオンの場合，$F^\mu(p)$ のゼロ点の指数の和はゼロである．

指数についてもう少し具体的に見ていこう．もし，$F^\mu(p_0)=0$ だとすると p_0 の近傍で $F^\mu(p)$ は以下のように展開される．

$$F^\mu(p) = A_{\mu,\nu}(p-p_0)_\nu + O((p-p_0)^2) \tag{5.1.14}$$

ここで，

$$A_{\mu,\nu} = \left.\frac{\partial F_\mu(p)}{\partial p_\nu}\right|_{p=p_0} \tag{5.1.15}$$

である．この時，ゼロ点の指数は

$$\det A_{\mu,\nu} \tag{5.1.16}$$

の符号で定義される．ここで，行列式は添え字 μ,ν に関するものである．直

観的には，ベクトル場 F_μ がゼロを横切るときの傾きのベクトルが右手系なら符号は正，左手系なら負と定義していることになっている．

次に，指数の正負がカイラル変換性（chirality）の正負に対応していることを見ていこう．簡単のために $p_0 = 0$ ととる．また，$A_{\mu,\nu}$ が対角になるようにフェルミオン場を定義し直す．すると，

$$F_\mu(p) \quad = \quad A_\mu p_\mu \tag{5.1.17}$$

と書けるはずである．(ここでは μ に関しての和は取っていない．) もし，$A_\mu = (1,1,1,1)$ なら，指数は $+1$ であり，フェルミオン作用は

$$i\bar{\psi}(p)\sum_\mu \gamma_\mu p_\mu \psi(p) \tag{5.1.18}$$

となる．一方，$A_\mu = (-1,1,1,1)$ であれば指数は -1 となるが，この時，格子フェルミオン作用は

$$\bar{\psi}\sum_\mu (1-2\delta_{\mu 1})\gamma_\mu p_\mu \psi \quad = \quad (\bar{\psi}\gamma_5\gamma_1)\cdot\sum_\mu \gamma_\mu p_\mu \cdot (\gamma_1\gamma_5\psi) \tag{5.1.19}$$

となる．もともとのフェルミ場 ψ がカイラル変換で

$$\psi \to e^{iQ\gamma_5}\psi \tag{5.1.20}$$

と変換するとする．ここで，Q はカイラル電荷である．この時，指数 ± 1 のゼロ点はそれぞれ

$$\psi(p) \quad \to \quad e^{iQ\gamma_5}\psi(p) \tag{5.1.21}$$

$$\gamma_5\gamma_1\psi(p) \quad \to \quad e^{-iQ\gamma_5}\gamma_5\gamma_1\psi(p) \tag{5.1.22}$$

と変換するので，$\gamma_1\gamma_5\psi(p)$ のカイラル電荷は $-Q$ となり，$\psi(p)$ のカイラル電荷 Q の逆符号で大きさが等しい．つまり，指数の正負とカイラル変換性の正負が等しいわけである．この事実とトーラスのオイラー数がゼロであることを組み合わせると，ニールセン・二宮の定理が証明できた事になる．

この定理の意味をもう少し直感的に説明しよう．連続理論では $F_\mu(p) = p_\mu a$ であり，ゼロ点は $\forall p_\mu = 0$ にしかない．ところが，格子理論の場合，運

動量は周期 $2\pi/a$ で周期的なので，ある μ に対して $F_\mu(0) = 0$ とすると，$F_\mu(0+2\pi/a) = 0$ となるはずでその傾きも等しい．したがって，p に関する連続性より，必ず途中のある点 p_0 で $F_\mu(p_0) = 0$ となる．実際，単純な格子化の場合，$F_\mu = \sin p_\mu a$ なので，$p_\mu = \pi/a$ でも $F_\mu = 0$ となり，これがダブラー (doubler) に対応している（図 5.1 を参照).

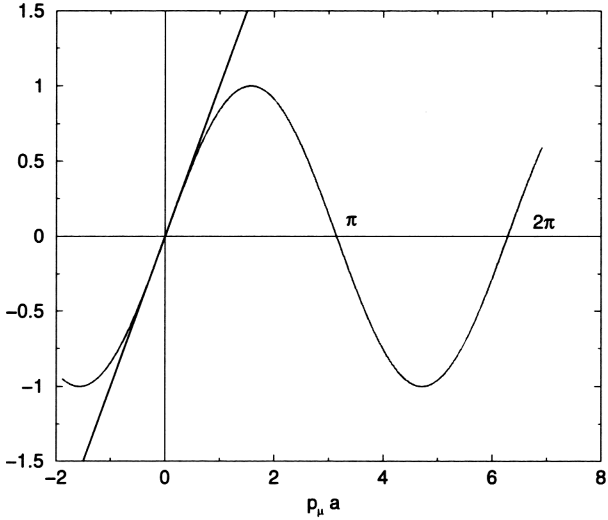


図 5.1：連続理論 $F_\mu(p) = p_\mu a$ と格子理論 $F_\mu(p) = \sin p_\mu a$. $p_\mu a$ が小さいときは両者は一致しているが格子の場合，サイン関数の周期性と連続性から $p_\mu a = \pi$ でも $F_\mu(p) = 0$ となり，これがダブラーに対応している．サイン関数を他の関数に変えても，周期性と連続性からダブラーの存在は避けられない．

ここで紹介した証明は論文 [27] のものであるが，そこではエルミート性が必要な理由として，エルミート性がない時に以下のようにカイラル対称性でダブラーないフェルミオンが構成できることを挙げている．前方差分

$$\bar{\psi}_n \gamma_\mu (\psi_{n+\hat{\mu}} - \psi_n) \tag{5.1.23}$$

を用いると

$$F_\mu(p) \quad = \quad e^{ip_\mu/2} \sin(p_\mu/2) \tag{5.1.24}$$

となるが，これはゼロ点が $p_\mu = 0$ しかない．したがって，エルミート性は定理の証明に必要である．筆者はこの議論が正しいと思っていたが，最近 (2004 年 5 月)，M. Lüshcer 博士によってこの場合にもダブラーが存在することが指摘された．フェルミオンの伝搬関数の分母は

$$\sum_\mu F_\mu(p)^2 = \sum_\mu e^{ip_\mu} \sin^2(p_\mu/2) \tag{5.1.25}$$

となるので，$p_1 = \pi/2, p_2 = -\pi/2, p_\mu = 0$ $(\mu \neq 1, 2)$ とすると，この量は

$$i/2 - i/2 + 0 + \cdots \ = \ 0 \tag{5.1.26}$$

となるので，伝搬関数はそこで極を持ち，したがって $p = 0$ 以外の粒子，ダブラーが存在する．したがって「ダブラーがない」というのは確かに正しくない．ただし，この場合のタブラーの数は偶数個になるので $p_\mu = 0$ の物理的な粒子と合わせると全部で奇数個になり定理の証明は成り立たない．また，ベクトル場のゼロ点と粒子の極との対応関係も崩れてしまうので，ここでの証明にはエルミート性の条件が必要であることには変わりはなさそうである．

§5.1.5 ダブリング問題とアノマリー

カイラル対称な格子フェルミオンにダブラーが現れることを別の観点から見てみよう．ネーター (Noether) の定理によると，対称性に付随して保存する 4 次元カレント (current) が存在する．カイラル対称性の場合は軸性ベクトル・カレント (axial-vector curent) $A_\mu(x) = i\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi(x)$ が保存カレントで，保存則は $\partial^\mu A_\mu = 0$ である．ところが，量子補正を考えると，

$$\partial^\mu A_\mu = \frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta} \tag{5.1.27}$$

とカレントの発散 (divergence) がゼロにならず，保存則は成立していない．この式のゼロになっていない右辺をカイラル・アノマリー (anomaly) と呼ぶ．アノマリーの出現は，量子補正を計算するときの正則化がカイラル対称性を破ってしまうことに起因している．アノマリーの存在は物理的にも必要で $\pi^0 \to 2\gamma$ の崩壊や $U(1)$ 問題の解決に寄与している．

ここで，カイラル対称な格子フェルミオンを考えることにしよう．$a \neq 0$ で正則化されているので紫外発散はなく，カイラル対称性が保たれているこ

とからアノマリーは存在しない．任意のゼロでない a でアノマリーがないので，$a \to 0$ でもアノマリーは現れることはない．つまり，カイラル対称な格子フェルミオンは（アノマリーを持つ）連続理論のフェルミオンの正しい格子化にはならないことがわかってしまうわけである．

実際，単純な格子化の場合の計算を詳しく調べると，ダブラー１つ１つの寄与はアノマリーを出すが，全部を足し上げるとそれらが相殺 (cancel) してゼロになっていることがわかる．16個のダブラーのうちの半分のカイラル電荷 Q_5 が $+1$，残りが -1 でアノマリーはカイラル電荷の和に比例するのでゼロになるのである [28].

ニールセン·二宮の定理の証明を思い出すと，$Q_5 = 1$ を与える極は $\#\pi = 0$ のものが1つ，$\#\pi = 2$ のものが6つ，$\#\pi = 4$ のものが1つであり，$Q_5 = -1$ は $\#\pi = 1$ のものが4つ，$\#\pi = 3$ のものが4つである．

この観点から，ニールセン・二宮の定理は，「カイラル対称な格子フェルミオンではアノマリーを相殺してゼロにするようなダブラーが必ず存在する」と言い換えられる．

§5.2　ダブリング問題の解決法I：ウィルソン・フェルミオン

ここではダブリング問題の１つの解決法であるウィルソン・フェルミオンの方法を紹介する．

§5.2.1　ウィルソン項とダブラーの分離

格子作用の作り方からわかるように $O(a)$ である項をいくら格子作用に加えても $a \to 0$ での作用の形は変わらない．したがって，そのような項を加えたものを新たに格子作用と考えてもいいはずである．そこで以下のような項を格子フェルミオン作用に付け加えてみる．

$$\begin{aligned} S_W &= -ar \int d^4x \bar{\psi} D^2 \psi \\ &\to -\frac{1}{2} \sum_{n,\mu} [\bar{\psi}_n U_{n,\mu} \psi_{n+\hat{\mu}} + \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}} U^\dagger_{n,\mu} \psi_n - 2\bar{\psi}_n \psi_n] \end{aligned} \quad (5.2.1)$$

この項のことをウィルソン項と呼び，r をウィルソン・パラメタと言う．(格

子作用の表式ではすべてを無次元化してある.）この項を加えた格子作用全体は $a \to 0$ で

$$S_F \quad = \quad S_F^0 + S_W \longrightarrow \bar{\psi}(\not{D} + m)\psi \tag{5.2.2}$$

と確かに連続理論の作用に一致する.

この項を加えることによってダブラーがどうなったかを考察しよう．簡単のため，やはり自由場（$U_{n,\mu} = 1$）の場合を考える．運動量空間で書いた格子作用は

$$S_F = \bar{\psi}(-p)[i\not{s}(p) + \overbrace{M + r\sum_{\mu}(1 - \cos p_\mu a)}^{M(p)}]\psi(p) \tag{5.2.3}$$

となるので，フェルミオンの伝搬関数は

$$G_F(p) = \frac{-i\not{s}(p) + M(p)}{s^2(p) + M(p)^2} \tag{5.2.4}$$

と書ける．ウィルソン項の寄与によって，質量 M が運動量に依存するよう質量項 $M(p)$ になったと考えれば前と同じ表式である．$a \to 0$ で $M(p)$ は

$$M(p) \quad = \quad \begin{cases} ma & \text{for physical pole} \\ ma + 2r|\delta| & \text{for doublers} \end{cases} \tag{5.2.5}$$

と振る舞う．ここで，δ は前に導入したもので，$|\delta|$ は π 程度の大きさを持つ運動量の数である．$(1 \le |\delta| \le d)$ これを，次元を持った質量で考えると

$$m_{\text{phys}} \quad = \quad m \tag{5.2.6}$$

$$m_{\text{doubler}} \quad = \quad m + \frac{2r}{a}|\delta| \to \infty \tag{5.2.7}$$

となる．つまり，われわれが必要とする物理的な粒子 $(\forall p_\mu \simeq 0)$ の質量は m のままであるが，ダブラー $(\exists p_\mu \simeq \pi/a)$ の質量は $m + 2r|\delta|/a$ となり連続極限で発散する．そのため，(無限大）の大きな質量を持つダブラーは低エネルギーの物理現象には寄与できなくなる．このようにして格子フェルミオンのダブラーを取り除く方法をウィルソン・フェルミオン (Wilson fermion) の方法と呼び，ダブラーの質量が連続極限で無限大になることを「低エネルギーでのダブラーの分離」(decoupling of doublers at low energy）と言う.

ここで1つ注意しておきたいことは，物理的粒子の質量が有限でダブラーの質量が発散するという違いは，人間が M を調節することで実現したのであって，理論がはじめから物理的粒子とダブラーを区別していたわけではないことである．実際，16個の粒子のそれぞれの質量は M/a が1つ，$(M+2r)/a$ が4つ，$(M+4r)/a$ が6つ，$(M+6r)/a$ が4つ，$(M+8r)/a$ が1つ，となるので，例えば，$M\to 0$ とする代わりに $M\to -2r$ とすれば連続極限は4つのフェルミオンを記述する理論になっている．また，ウィルソン・フェルミオン作用 $S_{\rm F}(M)+S_{\rm W}$ は

$$
\begin{aligned}
\psi_n &\to (-1)^n\psi_n, \qquad (-1)^n \equiv \prod_{\mu=1}^{4}(-1)^{n_\mu}\\
\bar\psi_n &\to (-1)^n\bar\psi_n
\end{aligned}
$$

という変数変換に対して

$$
S_F(M)\to -S_F(-(M+8r))
$$

となる性質をもっている．

フェルミオン作用の正負は物理的には違いがないので，このことは M の理論と $-(M+8r)$ の理論が等価であることを意味している．したがって，$M=0$ の連続極限と $M=-8r$ の連続極限は等価で1つのフェルミオンを記述しており，$M=-2r$ は $M=-6r$ と同じで4つのフェルミオン，$M=-4r$ は自分自身と等しく6つのフェルミオン，をそれぞれ記述している．このように，ウィルソン・フェルミオン作用のパラメータ全体では常に（質量は違うにしても）16個のフェルミオンが存在していることになる．

§5.2.2　ウィルソン・フェルミオンとカイラル対称性

ウィルソン・フェルミオンはニールセン・二宮の定理をどのように回避しているのだろうか？ 答えは簡単で，定理の仮定であるカイラル対称性がウィルソン・フェルミオンでは成り立っていないからである．

前に述べたようにカイラル対称性はフェルミオンの対称性であるが，ここでその物理的重要性について少し議論したい．強い相互作用を記述する量子色力学（QCD）では，このカイラル対称性は $m=0$ において自発的に破れ

ていると予測されている．つまり，QCD の相互作用の結果，

$$\lim_{m\to 0}\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0 \tag{5.2.8}$$

とカイラル対称性を破る演算子である $\bar{\psi}\psi$ の真空期待値がゼロでなくなる．いいかえると，$\bar{\psi}\psi$（の真空期待値）がカイラル対称性の秩序変数であるわけだ．カイラル対称性は連続変換であるので，破れに付随したゼロ質量の南部・ゴールドストーン粒子が現れるはずで，パイ中間子がそれに対応していると考えられている．実際のクォークは $m=0$ ではないので，パイ中間子は厳密にはゼロ質量ではないが，その質量の振る舞いは以下のようにウォード・高橋恒等式から予言できる．

まず，連続理論でカイラル変換に対するウォード・高橋恒等式を導く．QCD の作用のクォーク部分は

$$S_F(\psi,\bar{\psi}) \;=\; \sum_{f=1,N_f}\int d^4x\bar{\psi}_f(x)(\gamma_\mu D_\mu + m)\psi_f(x) \tag{5.2.9}$$

で与えられる．ここで添字 f はアップ，ダウンなどのクォークの種類を表す添字で「フレーバー」と呼ばれる．ここではフレーバー数が N_f で，クォーク質量 m はフレーバーに依らない場合を考えている．場所に依存した以下のような変数変換

$$\psi'(x) \;=\; \psi(x)+\delta\psi(x), \qquad \bar{\psi}'(x)=\bar{\psi}(x)+\delta\bar{\psi}(x), \tag{5.2.10}$$

を考える．ただし，

$$\delta\psi(x) \;=\; i\theta(x)\gamma_5\psi(x), \qquad \delta\bar{\psi}(x)=i\bar{\psi}(x)\gamma_5\theta(x) \tag{5.2.11}$$

である．ここでは ψ を N_f 成分のベクトルとして理解することにして添字 f は省略しているが，変換のパラメタはフレーバーの添字 f に作用する群 $\mathrm{U}(N_f)$ の生成子 T^a を用いて $\theta(x)=\sum_a\theta^a(x)T^a$ と展開されていて，$\theta^a(x)$ はその生成子に対応した無限小の変換パラメタである．(ここで，$a=0$ は $\mathrm{U}(1)$ 変換に対応していて T^0 は単位行列に比例している．) $\theta^a(x)$ を場所に依存しない定数にとると通常の (無限小) カイラル変換になる．クォークを含む演算子 $\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})$ の真空期待値

$$\langle 0|\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})|0\rangle \;=\; \int\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})e^{-S_F(\psi,\bar{\psi})} \tag{5.2.12}$$

を考える．ここで積分変数の名前を $\psi, \bar{\psi}$ から $\psi', \bar{\psi}'$ に変えておいて，変数変換 (5.2.10) を用いると

$$\begin{aligned}\langle 0|\mathcal{O}(\psi',\bar{\psi}')|0\rangle &= \int \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi\left[\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})+\delta\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})\right]e^{-S_F(\psi,\bar{\psi})}\left(1+\delta S_F(\psi,\bar{\psi})\right)\\ &= \langle 0|\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})|0\rangle+\langle 0|\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})\delta S_F(\psi,\bar{\psi})+\delta\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})|0\rangle\end{aligned} \tag{5.2.13}$$

となる．ここで，

$$\delta S_F(\psi,\bar{\psi}) = S_F(\psi+\delta\psi,\bar{\psi}+\delta\bar{\psi})-S_F(\psi,\bar{\psi}) \tag{5.2.14}$$

$$\delta\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi}) = \mathcal{O}(\psi+\delta\psi,\bar{\psi}+\delta\bar{\psi})-\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi}) \tag{5.2.15}$$

は，作用と演算子の無限小変換であり，δ^2 以上の項はすべて無視している．ψ で書こうが ψ' で書こうが期待値は等しい，ということを使うと式 (5.2.13) から

$$\langle 0|\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})\delta S_F(\psi,\bar{\psi})+\delta\mathcal{O}(\psi,\bar{\psi})|0\rangle = 0 \tag{5.2.16}$$

が言える．これがウォード・高橋恒等式の一般的な形である．特別な場合として，$a\neq 0, x$ を固定して，$\theta^b(y)=\delta(x-y)\delta_{ab}\theta$ と選び，また，$\mathcal{O}=P^a(y)=\bar{\psi}(y)\gamma_5 T^a\psi(y)$ と取る．すると

$$\delta S_F = i\theta\left\{-\partial_\mu\Big[\overbrace{\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\gamma_5 T^a\psi(x)}^{A^a_\mu(x)}\Big]+2m\overbrace{\bar{\psi}(x)\gamma_5 T^a\psi(x)}^{P^a(x)}\right\} \tag{5.2.17}$$

$$\delta\mathcal{O} = i\theta\delta(x-y)2\underbrace{\bar{\psi}(y)\psi(y)}_{S^0(x)} \tag{5.2.18}$$

とだから，一般的なウォード・高橋恒等式が勝手な θ で成り立つという条件から

$$\langle 0|\partial_\mu A^a_\mu(x)P(y)^a|0\rangle-2m\langle 0|P^a(x)P^a(y)|0\rangle = 2\delta(x-y)\langle 0|S^0(x)|0\rangle \tag{5.2.19}$$

が得られる．これもまたウォード・高橋恒等式（の１つ）と呼ばれている．ここでは経路積分を使ってこの恒等式は導いたが，その結果は演算子の期待値として書かれていることに注意して欲しい．

さて，この式を使ってパイ中間子の質量の振舞いを考察しよう．まず，任

意の局所演算子 $F(x)$ は平行移動の生成演算子 P_μ を使って

$$F(x) = e^{iP\cdot x}F(0)e^{-iP\cdot x} \tag{5.2.20}$$

と書けることに注意して，上の恒等式の途中に完全系

$$\mathbf{1} = |0\rangle\langle 0| + \sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}|\vec{p},k\rangle\frac{1}{2E_k(\vec{p})}\langle\vec{p},k| + \cdots \tag{5.2.21}$$

を挟む．ここで，$E_k(\vec{p})^2 = m_k^2 + |\vec{p}|^2$ であり，$\cdots$ は 2 粒子以上の状態を表す．この時，

$$\langle 0|P^a(x)|\vec{p},k\rangle = \langle 0|P^a(0)|\vec{p},k\rangle e^{-ip^k\cdot x} \tag{5.2.22}$$

$$\langle 0|\partial_\mu A_\mu^a(x)|\vec{p},k\rangle = i\langle 0|\left[P_\mu, A_\mu^a(x)\right]|\vec{p},k\rangle = -i\langle 0|A_\mu^a(0)|\vec{p},k\rangle p_\mu^k e^{-ip^k\cdot x} \tag{5.2.23}$$

であることに注意すると (ただし，$p^k = (E_k(\vec{p}),\vec{p})$ である)，

$$\sum_k \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{e^{-ip^k\cdot(x-y)}}{2E_k(\vec{p})}\left\{-ip_\mu^k\langle 0|A_\mu^a(0)|\vec{p},k\rangle - 2m\langle 0|P^a(0)|\vec{p},k\rangle\right\}$$
$$\times\langle\vec{p},k|P^a(0)|0\rangle + \cdots = 2\delta(x-y)\langle 0|S^0(0)|0\rangle \tag{5.2.24}$$

が得られる．ここで $x_0 \neq y_0$ と取る右辺がゼロになり，さらに $\vec{x}$ 積分をして以下の式を得る．

$$\sum_k \frac{e^{-im_k(x_0-y_0)}}{2m_k}\left\{-im_k\langle 0|A_0^a(0)|\vec{0},k\rangle - 2m\langle 0|P^a(0)|\vec{0},k\rangle\right\}\times\langle\vec{0},k|P^a(0)|0\rangle$$
$$+ \quad \cdots = 0 \tag{5.2.25}$$

ここで，$P^a(0)$ や $A_0^a(0)$ によって真空から生成される状態のうちで最小の質量を持つものはパイ中間子の状態であるので (最小の質量を持つ状態をパイ中間子と呼ぶ，と言った方が正確である．)，その質量を m_π として $e^{-im_\pi(x_0-y_0)}$ に比例する項を考えると

$$-im_\pi\langle 0|A_0^a(0)|\vec{0},\pi\rangle - 2m\langle 0|P^a(0)|\vec{0},\pi\rangle = 0 \tag{5.2.26}$$

となる．さらにパイ中間子の崩壊定数 f_π の定義

$$\langle 0|A_\mu|\vec{p},\pi\rangle = ip_\mu f_\pi \tag{5.2.27}$$

を用いると，最終的に

$$m_\pi^2 f_\pi = 2m\langle 0|P^a(0)|\vec{0},\pi\rangle \tag{5.2.28}$$

が得られる．つまり，パイ中間子の質量の2乗はクォーク質量に比例し，したがって，確かに $m=0$ でパイ中間子の質量がゼロになる．この関係式はPCAC (Partially Conserved Axialvector Current) 関係式と言う．

このようにカイラル対称性（とその自発的破れ）は，パイ中間子の質量の2乗がクォーク質量に比例し，クォーク質量が小さければ相互作用のスケールとは無関係にパイ中間子の質量が小さくなることを保証している．実際，パイ中間子の質量は140MeV程度で他のハドロンの典型的な質量である1GeVよりずっと小さく，カイラル対称性の南部・ゴールドストーン粒子という解釈は正しそうである．ところが，ウィルソン項は質量項と同じ（単位行列に比例する）γ 行列の構造をしているので，明らかにカイラル対称性を破っている．したがって，ウィルソン・フェルミオンは $m=0$ でもカイラル対称性をあらわに壊している．そのため，ニールセン・二宮の定理が適用されなかったわけだが，その結果,「カイラル対称性とその自発的破れを使ってのパイ中間子の質量に対する予言」ができなくなってしまうことになる．これは格子QCDを非摂動的な計算方法として使う場合に大きな欠点となってしまう．しかしながら，ニールセン・二宮の定理から，格子フェルミオンでカイラル対称性を保とうとすると必ずダブラーが現れてしまうが，このダブラーもまた望ましいものではない．このジレンマは格子理論の長年の懸案であったが，最近，その解決法が発見された．それについては後の章で触れる．また，ウィルソン・フェルミオンを使った格子QCDにおいてパイ中間子の質量や $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ がどの様に振る舞うかなども後で考えることにする．

前に，カイラル・アノマリーの存在が，カイラル対称性を保ち，かつ，ダブリング問題のない格子フェルミオンが不可能である理由だと述べた．一方，カイラル対称性を破るウィルソン・フェルミオンでアノマリーを計算すると r がゼロでなければその大きさに依存せず，式(5.1.27)を再現することが示されている[28]．ウィルソン・フェルミオンを使ったカイラル・アノマリーの具体的な計算は付録Dを見て欲しい．

§5.2.3 ゼロでない a でのウィルソン・フェルミオンの質量

ウィルソン・フェルミオンについては $a \to 0$ で粒子の質量がどうなるかを見てきたが，ここでは $a \neq 0$ の場合に伝搬関数の極から決まる粒子の質量がどうなるか考える．空間運動量 $\vec{p}$ がゼロの場合，伝搬関数は

$$G(\vec{p}=0, p_0) = \frac{-i\gamma_0 s_0(p_0) + M(p_0)}{s_0^2(p_0) + M(p_0)^2} \tag{5.2.29}$$

で与えられる．粒子の質量 m_p は伝搬関数の分母がゼロになる条件 $s_0^2(p_0) + M(p_0)^2 = 0$ に $p_0 = im_p$ を代入して

$$\sinh(m_p a) = M + r(1 - \cosh(m_p a)) \tag{5.2.30}$$

という関係式を満たす．これを解くと

$$m_p a = \log\left[\frac{(M+r) + \sqrt{M^2 + 2Mr + 1}}{1+r}\right] \tag{5.2.31}$$

と m_p が $M = ma$ の関数として求まる．上の方程式にはもう一つ解があり

$$m_d a = \log\left[\frac{(M+r) + \sqrt{M^2 + 2Mr + 1}}{r-1}\right] \tag{5.2.32}$$

と求まるが，これは時間方向に関するダブラーに対応している．特に $r = 1$ の場合は

$$m_p = \frac{1}{a}\log(1 + ma) = m + O(a) \tag{5.2.33}$$

となる．この時，$m_d \to \infty$ となるので，$a \neq 0$ でも時間方向のダブラーは極としては現れない．

§5.3 ダブリング問題の解決法 II:KS フェルミオン

ここでは，ダブリング問題を解決するもう 1 つの格子フェルミオンの定式化である KS フェルミオンの方法を紹介する．(KS はこのフェルミオンの提唱者である Kogut-Susskind の頭文字を表わす．別名，スタッガード (staggard)・フェルミオンとも呼ばれる.) KS フェルミオンはウィルソン・フェルミオンと並んで，実際の計算でよく用いられている．

§5.3.1 KS フェルミオンの作用

4次元のディラック・フェルミオンは4成分であるが，その代わりにここでは1成分の格子フェルミオンを考える．すると，ダブリングのために2^4(d次元では2^d)の粒子が現れるが，それらを使って4成分($2^{[d/2]}$成分)のディラック・フェルミオンを4個($2^{[d/2]}$個)を構成し，この4種類を粒子のフレーバーと考える．これがKSフェルミオンのアイデアで，ダブリングを回避するのでなく，それを積極的に使い，フレーバーと解釈するのが特徴である．

KS フェルミオンの作用は

$$\begin{aligned} S_F &= \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\{\eta_\mu(n)[\bar{\chi}(n)U_{n,\mu}\chi(n+\hat{\mu}) - \bar{\chi}(n+\hat{\mu})U^\dagger_{n,\mu}\chi(n)] \\ &+ m\bar{\chi}(n)\chi(n)\} \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

で与えられる．ここで，$\chi(n)$は1成分のKSフェルミオン場で，その符号関数は

$$\eta_\mu(n) = (-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_{\mu-1}} \tag{5.3.2}$$

である．

この作用は，$m=0$で以下で定義される「カイラル対称性」を持つ．

$$\chi(n) \rightarrow \chi'(n) = e^{\beta\varepsilon(n)}\chi(n) \tag{5.3.3}$$

$$\bar{\chi}(n) \rightarrow \bar{\chi}'(n) = \bar{\chi}(n)e^{\beta\varepsilon(n)} \tag{5.3.4}$$

ここで，$\varepsilon(n)=(-1)^{n_1+n_2+\cdots+n_d}$である．この変換で，質量項は

$$\bar{\chi}(n)\chi(n) \rightarrow e^{2\beta\varepsilon(n)}\bar{\chi}(n)\chi(n) \tag{5.3.5}$$

となるので，不変ではないが，差分項は

$$\begin{aligned} \eta_\mu(n)\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\mu}) &\rightarrow \eta_\mu(n)\bar{\chi}(n)\underbrace{e^{\beta\varepsilon(n)}e^{\beta\varepsilon(n+\hat{\mu})}}_{=1}\chi(n+\hat{\mu}) \\ &= \eta_\mu(n)\bar{\chi}(n)\chi(n+\hat{\mu}) \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

と不変になっている．通常のベクトル変換は

$$\chi(n) \rightarrow \chi'(n) = e^{\beta}\chi(n) \tag{5.3.7}$$

$$\bar{\chi}(n) \rightarrow \bar{\chi}'(n) = \bar{\chi}(n)e^{-\beta} \tag{5.3.8}$$

となり，差分項も質量項も不変に保つ．

§5.3.2 ディラック・フェルミオンへの書き換え

1 成分の KS フェルミオンから次のような変換で 4 成分のディラック・フェルミオンが構成される．

$$\psi(N)_{\alpha,f} \;=\; N_0\sum_A(\frac{\gamma_A}{2})_{\alpha,f}\ \chi(2N+A)\equiv N_0\sum_A(\frac{\gamma_A}{2})_{\alpha,f}\ \chi_A(N) \quad (5.3.9)$$

$$\bar{\psi}(N)_{\alpha,f} \;=\; N_0\sum_A\bar{\chi}(2N+A)(\frac{\bar{\gamma}_A}{2})_{\alpha,f}\equiv N_0\sum_A\bar{\chi}_A(N)(\frac{\bar{\gamma}_A}{2})_{\alpha,f}. \quad (5.3.10)$$

ここで，α はスピノル，f はフレーバーの自由度を表わす添え字であり，N_0 は規格化定数である．また，

$$\gamma_A \;=\; \gamma_1^{A_1}\gamma_2^{A_2}\gamma_3^{A_3}\gamma_4^{A_4}, \quad (5.3.11)$$

で与えられ，$\bar{\gamma}_A$ は γ_A の複素共役である．ここで，$A_\mu=0,1$ であり，従って，$2N+A$ は，$2N$ の点を含む，4 次元の超立方体の 16 個の頂点の座標の 1 つになっている．(2 次元の場合の例は図 5.2 を参照．)

$\sum_A$ はこの 16 個の点の和を意味する．また，簡単のために

$$\chi_A(N) \;\equiv\; \chi(2N+A) \quad (5.3.12)$$

という変数を定義した．ここで与えた γ_A は次の性質をもっていることは容易に示せる．

$$\mathrm{tr}\ \frac{\gamma_A^\dagger\gamma_B}{4} \;=\; \delta_{AB} \quad (5.3.13)$$

$$\sum_A(\frac{\gamma_A}{2})_{\alpha,i}(\frac{\gamma_A^\dagger}{2})_{j,\beta} \;=\; \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} \quad (5.3.14)$$

第 1 式はガンマ行列の直交性から出る性質で，第 2 式は任意の 4×4 行列は 16 個あるガンマ行列の積で展開できるという完全性から出る．この性質を使うと，

$$\sum_{\alpha,f}(\frac{\bar{\gamma}_A}{2})_{\alpha,f}\psi_{\alpha,f}=\sum_{\alpha,f,B}N_0(\frac{\gamma_A^\dagger}{2})_{f,\alpha}(\frac{\gamma_B}{2})_{\alpha,f}\chi_B(N)=N_0\chi_A(N) \quad (5.3.15)$$

となるので，$\chi_A,\bar{\chi}_A$ は

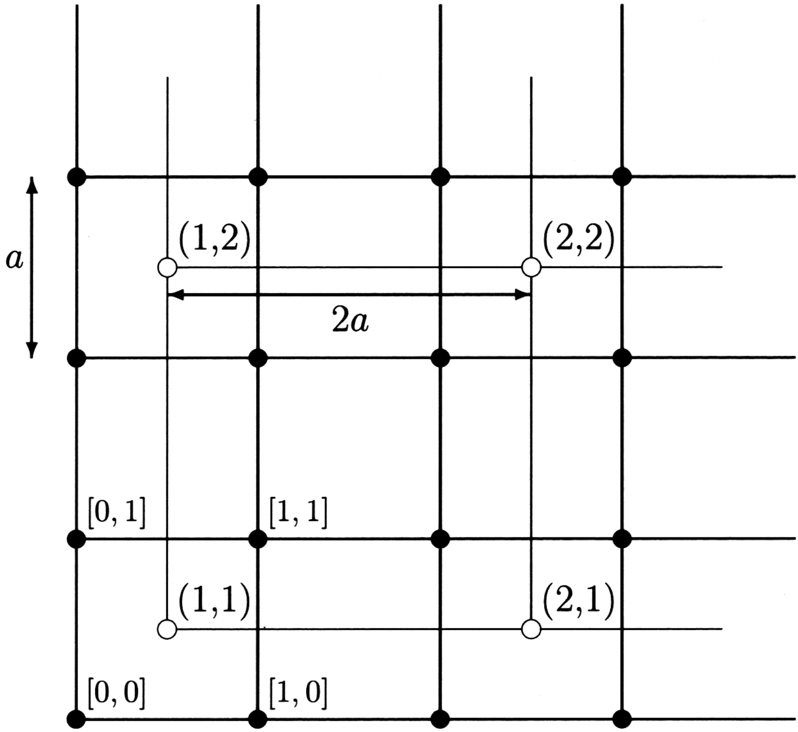


図 5.2：KS フェルミオンからディラック・フェルミオンを構成する格子構造 (2 次元) の模式図．(N_1, N_2) は座標 N，$[A_1, A_2]$ は 1 つの超立方体 (正方形) の頂点座標 A，を表す．

$$\chi_A(N) \;=\; \frac{1}{N_0}\mathrm{tr}\,\frac{\gamma_A^\dagger}{2}\psi(N), \quad \bar{\chi}_A(N) = \frac{1}{N_0}\mathrm{tr}\,\bar{\psi}(N)\frac{\gamma_A^T}{2} \tag{5.3.16}$$

と逆に $\psi,\bar{\psi}$ を用いて表わすことが出来る．

さて，χ に対する「カイラル変換」が ψ に対してどのように作用するか見てみよう．無限小のカイラル変換 $(\beta = i\theta)$ に対して

$$\begin{aligned}
\delta\psi(N)_{\alpha,f} &= N_0\sum_A(\frac{\gamma_A}{2})_{\alpha,f}\delta\chi(2N+A) \\
&= N_0\sum_A(\frac{\gamma_A}{2})_{\alpha,f}i\theta(-1)^{A_1+A_2+A_3+A_4}\chi_A(N) \\
&= \frac{N_0}{2}\sum_A(\gamma_5\gamma_A\gamma_5)_{\alpha,f}i\theta\chi_A(N) \\
&= \frac{N_0}{2}\sum_A(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\gamma_A)_{\beta,g}(\gamma_5)_{gf}i\theta\chi_A(N) \\
&= i\theta[\gamma_5\otimes t_5\psi(N)]_{\alpha,f}
\end{aligned} \tag{5.3.17}$$

となる．ここで，$t_5\equiv\gamma_5^T$ である．したがって，有限の θ に対しては

$$\psi(N)' = e^{i\theta(\gamma_5\otimes t_5)}\psi(N),\quad \bar\psi(N)'=\bar\psi(N)e^{i\theta(\gamma_5\otimes t_5)} \tag{5.3.18}$$

となり，変換はカイラル変換と同時にフレーバーも t_5 で変換する $U(1)$ 変換になっていることがわかる．

§5.3.3 ディラック場に対する作用

ディラック場を用いて KS フェルミオンの作用を書き換えることを考えよう．まず初めに以下の準備をする．

$$\begin{aligned}
\sum_n\bar\chi(n)\chi(n) &= \sum_N\sum_A\bar\chi_A(N)\chi_A(N) \\
&= \frac{1}{4N_0^2}\sum_N\bar\psi(N)_{\alpha,i}\sum_A(\gamma_A)_{\alpha,i}(\gamma_A^\dagger)_{j,\beta}\psi(N)_{\beta,j} \\
&= \frac{1}{N_0^2}\sum_N\bar\psi(N)(1\otimes1)\psi(N)
\end{aligned} \tag{5.3.19}$$

ここでは，式 (5.3.16) とディラック行列の完全性である式 (5.3.14) を用いた．また，

$$\chi(2N+A+\hat\mu) = \sum_B[\delta_{A+\hat\mu,B}\ \chi_B(N)+\delta_{A-\hat\mu,B}\ \chi_B(N+\hat\mu)] \tag{5.3.20}$$

$$\chi(2N+A-\hat\mu) = \sum_B[\delta_{A-\hat\mu,B}\ \chi_B(N)+\delta_{A+\hat\mu,B}\ \chi_B(N-\hat\mu)] \tag{5.3.21}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n,\mu}\eta_\mu(n)\bar{\chi}(n)[\chi(n+\hat{\mu})-\chi(n-\hat{\mu})]\\
=\ &\sum_{N,\mu}\sum_{A,B}\bar{\chi}_A(N)\eta_\mu(A)\left[\delta_{A+\hat{\mu},B}\chi_B(N)+\delta_{A-\hat{\mu},B}\chi_B(N+\hat{\mu})\right.\\
&\qquad\qquad\left.-\delta_{A-\hat{\mu},B}\chi_B(N)-\delta_{A+\hat{\mu},B}\chi_B(N-\hat{\mu})\right]\\
=\ &\sum_{N,\mu}\sum_{A,B}\bar{\chi}_A(N)\eta_\mu(A)\Big[(\delta_{A+\hat{\mu},B}+\delta_{A-\hat{\mu},B})\nabla_\mu\chi_B(N)\\
&\qquad\qquad+(\delta_{A-\hat{\mu},B}-\delta_{A+\hat{\mu},B})\nabla^2_\mu\chi_B(N)\Big]\\
\equiv\ &\sum_{N,\mu}\sum_{A,B}\bar{\chi}_A(N)\left[\Gamma^\mu_{AB}\nabla_\mu\chi_B(N)+\Gamma^{5\mu}_{AB}\nabla^2_\mu\chi_B(N)\right] \qquad (5.3.22)
\end{aligned}
$$

と書き直せる．ここで，

$$
\Gamma^\mu_{AB}\equiv\eta_\mu(A)(\delta_{A+\mu,B}+\delta_{A-\mu,B}),\quad \Gamma^{5\mu}_{AB}\equiv\eta_\mu(A)(\delta_{A-\mu,B}-\delta_{A+\mu,B}) \qquad (5.3.23)
$$

$$
\nabla_\mu\chi(N)\equiv\frac{\chi(N+\hat{\mu})-\chi(N-\hat{\mu})}{2},\quad \nabla^2_\mu\chi(N)\equiv\frac{\chi(N+\hat{\mu})+\chi(N-\hat{\mu})-2\chi(N)}{2} \qquad (5.3.24)
$$

と定義している．また，

$$
\begin{aligned}
\chi_B(N+\hat{\mu})-\chi_B(N) &= \frac{1}{2}[\chi_B(N+\hat{\mu})-\chi_B(N-\hat{\mu})]\\
&+\ \frac{1}{2}[\chi_B(N+\hat{\mu})+\chi_B(N-\hat{\mu})-2\chi_B(N)] \qquad (5.3.25)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\chi_B(N)-\chi_B(N-\hat{\mu}) &= \frac{1}{2}[\chi_B(N+\hat{\mu})-\chi_B(N-\hat{\mu})]\\
&-\ \frac{1}{2}[\chi_B(N+\hat{\mu})+\chi_B(N-\hat{\mu})-2\chi_B(N)] \qquad (5.3.26)
\end{aligned}
$$

を用いた．

これらの式をディラック場で書き換えると，

$$\begin{aligned}\sum_{A,B}\bar{\chi}_A(N)\Gamma^{\mu}_{AB}\nabla_\mu\chi_B(N) &= \frac{1}{4N_0^2}\sum_A\bar{\psi}(N)_{\alpha,i}(\gamma_A)_{\alpha,i} \\ \times\left[\delta_{A_\mu,0}(\gamma^\dagger_{A+\hat{\mu}})_{j,\beta}+\delta_{A_\mu,1}(\gamma^\dagger_{A-\hat{\mu}})_{j,\beta}\right]&\eta_\mu(A)\nabla_\mu\psi(N)_{\beta,j} \\ &= \frac{1}{N_0^2}\bar{\psi}(N)(\gamma_\mu\otimes 1)\nabla_\mu\psi(N)\end{aligned} \tag{5.3.27}$$

$$\begin{aligned}\sum_{A,B}\bar{\chi}_A(N)\Gamma^{5\mu}_{AB}\nabla^2_\mu\chi_B(N) &= \frac{1}{4N_0^2}\sum_A\bar{\psi}(N)_{\alpha,i}(\gamma_A)_{\alpha,i} \\ \times\left[\delta_{A_\mu,1}(\gamma^\dagger_{A-\mu})_{j,\beta}-\delta_{A_\mu,0}(\gamma^\dagger_{A+\mu})_{j,\beta}\right]&\eta_\mu(A)\nabla^2_\mu\psi(N)_{\beta,j} \\ &= \frac{1}{4N_0^2}\bar{\psi}(N)_{\alpha,i}(\gamma_5)_{\alpha\beta}(\bar{\gamma}_\mu\gamma_5^T)_{ij}\nabla^2_\mu\psi(N)_{\beta,j} \\ &= \frac{1}{N_0^2}\bar{\psi}(N)(\gamma_5\otimes t_\mu t_5)\nabla^2_\mu\psi(N)\end{aligned} \tag{5.3.28}$$

となる．ただし，$t_\mu\equiv\overline{\gamma}_\mu$ と定義されるが，$\gamma^\dagger_\mu=\gamma_\mu$ なので $t_\mu=\gamma^T_\mu$ である．上の書き換えでは以下の変形を用いた．

$$\begin{aligned}&\sum_{A;A_\mu=0}\eta_\mu(A)\gamma_A\otimes\gamma^\dagger_{A+\hat{\mu}}+\sum_{A;A_\mu=1}\eta_\mu(A)\gamma_A\otimes\gamma^\dagger_{A-\hat{\mu}} \\ =\;&\sum_{A;A_\mu=0}\gamma_A\otimes(\gamma^\dagger_A\gamma^\dagger_\mu)+\sum_{A;A_\mu=1}\gamma_A\otimes(\gamma^\dagger_A\gamma^\dagger_\mu) \\ =\;&\sum_A\gamma_A\otimes(\gamma^\dagger_A\gamma^\dagger_\mu)=4\gamma^\dagger_\mu\otimes\mathbf{1}=4\gamma_\mu\otimes\mathbf{1}\end{aligned} \tag{5.3.29}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{A;A_\mu=1}\eta_\mu(A)\gamma_A\otimes\gamma^\dagger_{A-\hat{\mu}}-\sum_{A;A_\mu=0}\eta_\mu(A)\gamma_A\otimes\gamma^\dagger_{A+\hat{\mu}} \\ =\;&\sum_{A;A_\mu=1}(-1)^{A_\mu}\epsilon(A))\gamma_A\otimes(\gamma^\dagger_\mu\gamma^\dagger_A)-\sum_{A;A_\mu=0}(-1)^{A_\mu}\epsilon(A)\gamma_A\otimes(\gamma^\dagger_\mu\gamma^\dagger_A) \\ =\;&\sum_A\gamma_A\otimes(\gamma_5\gamma^\dagger_\mu\gamma^\dagger_A\gamma_5)=4\gamma_5\otimes(\gamma_5\gamma^\dagger_\mu)^T=4\gamma_5\otimes t_\mu t_5\end{aligned} \tag{5.3.30}$$

これらの結果を代入するとディラック場に対する作用は

$$S=\frac{1}{N_0^2}\sum_{N,\mu}\bar{\psi}(N)\left[(\gamma_\mu\otimes\mathbf{1})\frac{\nabla_\mu}{2}+(\gamma_5\otimes t_\mu t_5)\frac{\nabla^2_\mu}{2}+M(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})\right]\psi(N) \tag{5.3.31}$$

となる．この作用にはダブリング問題はない．なぜなら，格子 $\{N\}$ は偶数の格子点のみからなるので，その格子間隔は $2a$ で，したがって運動量の最大値

は $\dfrac{\pi}{2a}$ となり，運動量が π/a となるダブラーは現れない．しかしながら，ウィルソン項に似た形をした2番目の項にフレーバーに関する行列が現れているので，フレーバー対称性があらわに破れてしまっている．つまり，KS フェルミオンは（フレーバー・カイラル対称性の壊れた）4フレーバーのディラック・フェルミオンと等価であるということができる．4フレーバーのフレーバー・カイラル対称性は $SU(4) \otimes SU(4)$ であるが，それがすべて壊れてるわけではなく，前述したフレーバーに関して非対角なカイラル $U(1)$ 変換に対しては作用が不変であることは容易に示せる．つまり，無限小変換を考えると

$$
\begin{aligned}
\delta S &\propto (\gamma_5 \otimes t_5)(\gamma_5 \otimes t_\mu t_5) + (\gamma_5 \otimes t_\mu t_5)(\gamma_5 \otimes t_5) \\
&= \mathbf{1} \otimes t_5 t_\mu t_5 + \mathbf{1} \otimes t_\mu = 0
\end{aligned}
\tag{5.3.32}
$$

となり，作用はカイラル変換に対して不変であることがわかる．

第 6 章

ウィルソン・フェルミオンを用いた格子QCDの解析

この章では，クォーク作用としてウィルソン・フェルミオンを用いた場合の格子上の量子色力学（QCD）を主に強結合展開を用いて解析する．

§6.1　強結合展開とホッピング・パラメタ展開

§6.1.1　作用とファイマン規則

QCD は SU(3) ゲージ理論のゲージ場であるグルーオンと SU(3) の基本表現に属するクォークとがゲージ不変な相互作用をする理論である．クォークとしてウィルソン・フェルミオンの定式化を用いると格子 QCD の作用は

$$S = S_G(U) + S_F(\psi, \bar{\psi}, U) \tag{6.1.1}$$

で与えられる．ここで，S_G はプラケットを用いたゲージ場の作用であり，フェルミオン作用は

$$\begin{aligned} S_F &= (M+4r)\sum_n \bar{\psi}_n \psi_n \\ &- \frac{1}{2}\sum_{n,\mu} \bar{\psi}_n [(r-\gamma_\mu)U_{n,\mu}\psi_{n+\mu} + (r+\gamma_\mu)U^\dagger_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu}] \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

で与えられる．ここではフレーバー数は 1 としているが，任意のフレーバー数 N_f への拡張は容易である．$K = \dfrac{1}{2(M+4r)}$ という量を定義して，クォーク場を $\psi = \sqrt{2K}\psi'$ と再定義すると，格子作用は

$$
\begin{aligned}
S_F &= \sum_n \bar{\psi}_n \psi_n \\
&- K \sum_{n,\mu} \bar{\psi}_n [(r-\gamma_\mu) U_{n,\mu} \psi_{n+\mu} + (r+\gamma_\mu) U^\dagger_{n-\mu,\mu} \psi_{n-\mu}]
\end{aligned} \qquad (6.1.3)
$$

と書き直せる．(ここでクォーク場の $'$ は省略した.) K はホッピング・パラメタとよばれ，その表式から K が小さいことはクォーク質量が大きいことに対応している．以下では K が比較的小さい (クォークが重い) として K による展開を用いて物理量を計算していく．K の展開はホッピング・パラメタ展開と呼ばれている．

ホッピング・パラメタ展開の場合のクォークに関するファイマン規則を図 6.1 に与える．フェルミオンの伝搬関数 $\langle\psi\bar{\psi}\rangle_0$ の添字 0 はホッピング・パラメタ展開の最低時の寄与を表しており，この展開での「自由場」の伝搬関数を意味している．

$$(n,a,\alpha) \quad \text{—}\bullet\text{—} \quad (m,b,\beta) = \langle \psi^a_{n,\alpha} \bar{\psi}^b_{m,\beta} \rangle_0 = -\delta_{nm}\delta_{\alpha\beta}\delta^{ab}$$

$$(n,a,\alpha) \quad \longrightarrow \quad (n+\hat{\mu},b,\beta) = -K(r-\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(U_{n,\mu})^{ab}$$

$$(n,b,\beta) \quad \longleftarrow \quad (n+\hat{\mu},a,\alpha) = -K(r+\gamma_\mu)_{\alpha\beta}(U^\dagger_{n,\mu})^{ab}$$

図 6.1：ウィルソン・フェルミオンに対するホッピング・パラメタ展開のファイマン規則.

次の節ではホッピング・パラメタ展開を用いていろいろな物理量を計算するが，ここでは簡単な例を紹介する．4章で見て来たように，ゲージ不変な観測量であるウィルソン・ループやポリャコフ・ループは静的クォークの軌跡と関係していた．静的クォークは重いので対応するホッピング・パラメタは小さくなり，展開が使える．ウィルソン・ループの場合は，時刻ゼロで $\vec{n} = (n_x, n_y, 0)$ で生成されたクォーク・反クォークの対が瞬時に $((n_x, n_y, \pm L/2)$ に引き離され，静的クォーク，反クォークがそこに留まったまま時間 T が過ぎ，時刻 T で対消滅した状況に対応している (図 6.2)．この物理的過程の期待値をホッピング・パラメタ展開を使って計算をすると，

$$
\begin{aligned}
& -(2K)^{2(T+L)}\mathrm{tr}\left(\frac{1-\gamma_3}{2}\frac{1-\gamma_4}{2}\frac{1+\gamma_3}{2}\frac{1+\gamma_4}{2}\right)\langle W(C=L\times T)\rangle \\
= \ & \frac{1}{2}(2K)^{2(T+L)}\langle W(C=L\times T)\rangle \qquad (6.1.4)
\end{aligned}
$$

となり，ウィルソン・ループの期待値に比例していることが分かる．ただし，ここでは $r=1$ として計算した．1 行目の先頭のマイナス符号はクォーク場がグラスマン数であることによるループの符号因子である．同様に，図 6.2 の右図に対応する静的クォークの自由エネルギーを計算すると

$$
\begin{aligned}
e^{-F_q(\text{ static })T} &= (2K)^T\mathrm{tr}\,\frac{1-\gamma_4}{2}P(T)+\cdots \\
&= (2K)^T 2P(T)+O(K^{T+2}) \qquad (6.1.5)
\end{aligned}
$$

となり，ポリャコフ・ループに比例していることがわかる．クォーク・ループからくるマイナス符号はクォークの反周期境界条件からくるマイナス符号と相殺していることに注意して欲しい．

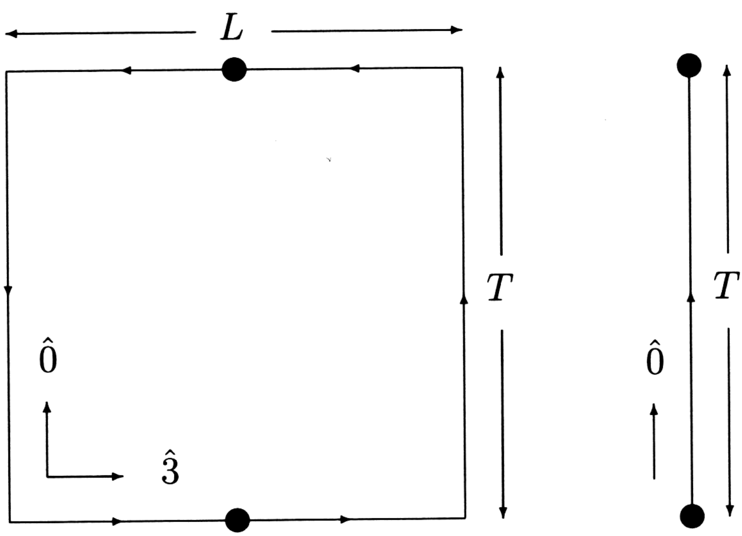


図 6.2：ホッピング・パラメタ展開で生成されたウィルソン・ループ (左) とポリャコフ・ループ (右).

§6.1.2　真空期待値（1点関数）

ここでは $\bar{\psi}\psi$ などの真空期待値を強結合の極限でホッピング・パラメタ展開を用いて計算する．強結合の極限では U が単独で現れることは出来ず，必ず，U と $U^\dagger$ が対になって現れなくてはいけない．つまり，フェルミオンが n から $n+\hat{\mu}$ に “ホップ” したら同時に反フェルミオンは $n+\hat{\mu}$ から n にホップする必要がある．図 6.3 に与えられている寄与をファイマン規則に従って計算すると，

$$
\begin{aligned}
\langle \psi_n^{a\beta}\bar{\psi}_n^{b\alpha}\rangle &\equiv -\delta_{ab}\Sigma_{\beta\alpha} \\
&= \langle \psi_n^{\beta}\bar{\psi}_n^{\alpha}\rangle_0 + K^2\sum_{\mu}\langle \psi_n^{\beta}\bar{\psi}_n\rangle_0(r\mp\gamma_\mu)U_{n,\mu}\langle\psi_{n+\hat{\mu}}\bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\rangle_0 \\
&\times (r\pm\gamma_\mu)U^\dagger_{n,\mu}\langle\psi_n\bar{\psi}_n^{\alpha}\rangle_0 + K^4\sum_{\mu\nu}\langle\psi_n^{\beta}\bar{\psi}_n\rangle_0(r\mp\gamma_\mu)U_{n,\mu} \\
&\times \langle\psi_{n+\hat{\mu}}\bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\rangle_0(r\pm\gamma_\mu)U^\dagger_{n,\mu}\langle\psi_n\bar{\psi}_n\rangle_0(r\mp\gamma_\nu)U_{n,\nu} \\
&\times \langle\psi_{n+\hat{\nu}}\bar{\psi}_{n+\hat{\nu}}\rangle_0(r\pm\gamma_\nu)U^\dagger_{n,\nu}\langle\psi_n\bar{\psi}_n^{\alpha}\rangle_0 + \cdots \\
&= \langle \psi_n^{\beta}\bar{\psi}_n^{\alpha}\rangle_0 + K^2\sum_{\mu}\langle \psi_n^{\beta}\bar{\psi}_n\rangle_0(r\mp\gamma_\mu)U_{n,\mu}\langle\psi_{n+\hat{\mu}}\bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\rangle \\
&\times (r\pm\gamma_\mu)U^\dagger_{n,\mu}\langle\psi_n\bar{\psi}_n^{\alpha}\rangle
\end{aligned}
\tag{6.1.6}
$$

$$
\begin{aligned}
-\Sigma^{\beta\alpha} &= -\delta_{\beta\alpha} \\
&- K^2\sum_{\mu}[(r-\gamma_\mu)\Sigma(r+\gamma_\mu)\Sigma+(r+\gamma_\mu)\Sigma(r-\gamma_\mu)\Sigma]^{\beta\alpha}
\end{aligned}
\tag{6.1.7}
$$

となる．上の式は未知量 $\Sigma_{\beta\alpha}$ に対する方程式と考えることができ，そこから導かれた (ただし簡単のために $r=1$ と置いた) ギャップ方程式は

$$
\Sigma = \mathbf{1} + K^2\sum_{\mu}[(1-\gamma_\mu)\Sigma(1+\gamma_\mu)\Sigma+(1+\gamma_\mu)\Sigma(1-\gamma_\mu)\Sigma] \tag{6.1.8}
$$

となる．

このギャップ方程式の解を求めよう．

一番簡単な場合である $\Sigma=\mathbf{1}\Sigma_0$ と置いた解を考えると，$r=1$ の場合はホッピング・パラメタ展開の高次項がすべてゼロになってしまうので，$\Sigma_0=1$ であることがすぐわかる．したがって，

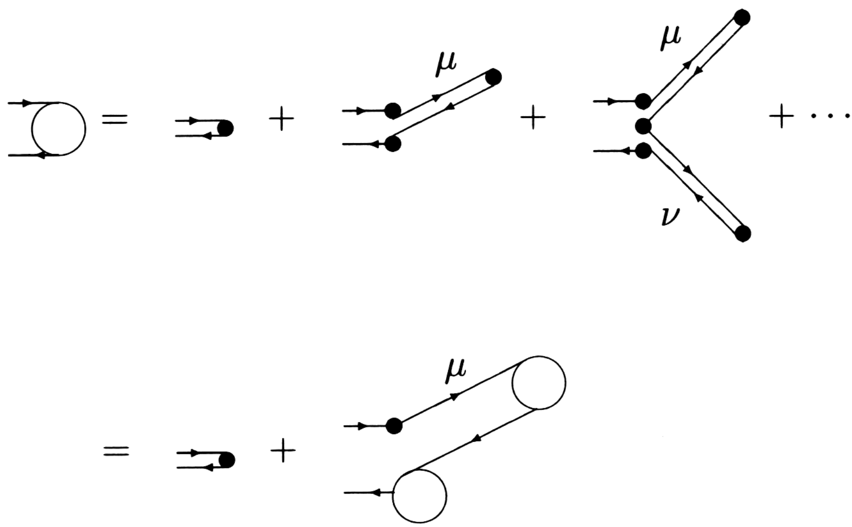


図 6.3：強結合の極限での真空期待値のホッピング・パラメタ展開による計算．2 行目ではホッピング・パラメタ展開の高次項を全て足し合わせたとして最低時の伝搬関数 (黒丸) を高次を全て含んだ伝搬関数 (白丸) に置き換えた．

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = N_c C(2K) = \frac{N_c C}{M+4} \tag{6.1.9}$$

となる．ここでは $2K$ で再定義する前の元のクォーク場で真空期待値を書いている．また，$C = 2^{[d/2]}$ であり，4 次元 ($d = 4$) では $C = 4$ である．この解はすべての M に対して $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$ となっている．ただし，もともとウィルソン・フェルミオンはカイラル対称性を壊してしまっているので，$\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$ であるからといって，カイラル対称性が自発的に破れていると結論することはできない．

ホッピング・パラメタ展開の高次項が重要になる場合を考えよう．そのために解の形を $\Sigma = \mathbf{1}\Sigma_0 + i\gamma_5\Sigma_5$ と少し拡張して考える．この時，ギャップ方程式は

$$\Sigma_0 + i\gamma_5\Sigma_5 = 1 + K^2 4di\gamma_5\Sigma_5(\Sigma_0 + i\gamma_5\Sigma_5) \tag{6.1.10}$$

となり，$\mathbf{1}$ と γ_5 のそれぞれの係数を比較して，

$$\Sigma_0 = 1 - K^2 4d\Sigma_5^2 \tag{6.1.11}$$

$$\Sigma_5 = K^2 4d\Sigma_5\Sigma_0 \tag{6.1.12}$$

を得る．これらを満たす（4次元での）解は2つあり，元のクォーク場で書くと，一つは

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = N_c C(2K), \quad \langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle = 0 \tag{6.1.13}$$

と前と同じであるが，もう1つは

$$\langle\bar{\psi}\psi\rangle = \frac{N_c C}{8K}, \quad \langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle = \pm\frac{\sqrt{16K^2-1}}{8K} \quad |K| \geq 1/4 \tag{6.1.14}$$

で与えられ，$\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$ となるだけでなく，$\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle \neq 0$ ともなっている．ただし，$|K| \geq 1/4$ でしか解は存在しない．この後者の解の物理的な意味については，もう少し後で詳しく議論する．

§6.1.3　2点関数と中間子の質量

次に中間子の伝搬関数（2点関数）を計算する．中間子を記述するの演算子は

$$M_X(n) = \bar{\psi}_n^a \Gamma_X \psi_n^a, \quad M^X(n) = \bar{\psi}_n^a \Gamma^X \psi_n^a \tag{6.1.15}$$

で与えられる．ここで，

$$\Gamma_S = 1,\ \Gamma_P = \gamma_5,\ \Gamma_V = \gamma_\mu,\ \Gamma_A = \gamma_5\gamma_\mu,\ \Gamma_T = \gamma_\mu\gamma_\nu$$

であり，$X = S, P, V, A, T$ はそれぞれスカラー (Scalar)，擬スカラー (Pseudoscalar)，ベクター (Vector)，擬ベクター (Axial-vector)，テンソル (Tensor) を表わす．また，$\Gamma^X = \Gamma_X^\dagger$ である．この16個の行列は 4×4 行列の基底となっており，

$$\mathrm{tr}\,\Gamma_X\Gamma^Y = 4\delta_{XY}, \quad \frac{1}{4}\sum_X (\Gamma_X)_{ij}(\Gamma^X)_{kl} = \delta_{il}\delta_{jk} \tag{6.1.16}$$

という直交性と完全性を満たしている．

この演算子の2点関数は図6.4で与えられ，以下のように計算される．

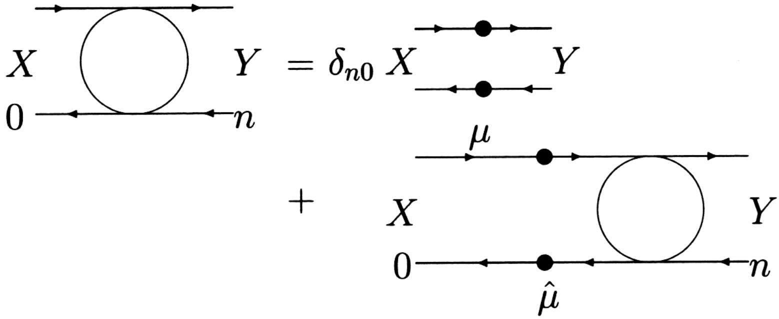


図 6.4：強結合の極限でのホッピング・パラメタ展開による 2 点関数の満たすべき関係.

$$
\begin{aligned}
S_{XY}(0,n) &\equiv \langle M_X(0) M^Y(n)\rangle = \langle \bar{\psi}_0^a \Gamma_X \psi_0^a \bar{\psi}_n^b \Gamma^Y \psi_n^b \rangle \\
&= -\delta_{0n} N_c \mathrm{tr}\ \Gamma_X \Gamma^Y \\
&+ K^2 \langle \bar{\psi}_0^a \Gamma_X \psi_0^a \bar{\psi}_0^c \{(1-\gamma_\mu) U_{0,\mu}^{cd} \psi_{\hat{\mu}}^d \bar{\psi}_{\hat{\mu}}^e (1+\gamma_\mu)(U_{0,\mu}^\dagger)^{ef} \\
&+ (1+\gamma_\mu)(U_{-\hat{\mu},\mu}^\dagger)^{cd} \psi_{-\mu}^d \bar{\psi}_{-\mu}^e (1-\gamma_\mu) U_{-\hat{\mu},\mu}^{ef}\} \psi_0^f \bar{\psi}_n^b \Gamma^Y \psi_n^b \rangle \\
&= -\delta_{n0} N_c \mathrm{tr}\ \Gamma_X \Gamma^Y \\
&- K^2 \sum_{\pm\mu} \langle \mathrm{tr}\ [\Gamma_X (1\mp\gamma_\mu) \psi_{\hat{\mu}}^a \bar{\psi}_{\hat{\mu}}^a (1\pm\gamma_\mu)] \bar{\psi}_n^b \Gamma^Y \psi_n^b \rangle
\end{aligned}
\tag{6.1.17}
$$

ここで，Γ_X の完全性を用いると

$$
\bar{\psi}^\alpha \psi^\beta = \frac{1}{4} \sum_Z (\bar{\psi} \Gamma_Z \psi)(\Gamma^Z)^{\beta\alpha} \tag{6.1.18}
$$

となるので，上の式は

$$
\begin{aligned}
S_{XY}(0,n) &= -\delta_{n0} 4 N_c \delta_{XY} \\
&+ K^2 \sum_{C,\mu} [T_{XZ}^{+\mu} S_{ZY}(\hat{\mu},n) + T_{XZ}^{-\mu} S_{ZY}(-\hat{\mu},n)]
\end{aligned}
\tag{6.1.19}
$$

となる．ここで，

$$
T_{AC}^{\pm\mu} = \frac{1}{4} \mathrm{tr}\ \Gamma_A (1 \mp \gamma_\mu) \Gamma^C (1 \pm \gamma_\mu) \tag{6.1.20}
$$

である．この式をフーリエ変換して運動量空間で書き表すと，

$$
S_{AB}(p) = -4 N_c \delta_{AB} + K^2 [T_{AC}^{+\mu} e^{-ip_\mu} + T_{AC}^{-\mu} e^{ip_\mu}] S_{CB}(p) \tag{6.1.21}
$$

という伝搬関数 S_{AB} に対する方程式が得られる．

さて，パイ中間子の質量を計算するために対応する擬スカラー (P)・擬ベクター (A) の 2 点関数に対する方程式を考える．空間部分の運動量をゼロ $(\vec{p}=0)$ とすると，式 (6.1.21) から

$$S_{PP} = -4N_c + 4K^2[(3+c_0)S_{PP} - is_0 S_{A_0P}] \qquad (6.1.22)$$

$$S_{A_0P} = 4K^2[-is_0 S_{PP} + c_0 S_{A_0P}] \qquad (6.1.23)$$

という方程式が得られるが，これを線型方程式の形に書くと，

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1-4K^2(3+c_0) & 4K^2 is_0 \\ 4K^2 is_0 & 1-4K^2c_0 \end{pmatrix}}^{D(p_0)} \begin{pmatrix} S_{PP} \\ S_{A_0P} \end{pmatrix} = -4N_c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (6.1.24)$$

となる．ただし，$c_0 = \cos p_0$，$s_0 = \sin p_0$ と略記している．両辺に $D(p_0)$ の逆行列をかければ解が求まる．つまり，$D(p_0)$ の逆行列が伝搬関数であるから，$D(p_0)$ の固有値のゼロ点が粒子の質量に対する条件を与える．したがって，

$$\det D(p_0) = 1 - 12K^2 + 16K^4 - 8K^2c_0 + 48K^4c_0 = 0 \qquad (6.1.25)$$

を解くと粒子の質量が決まる．$p_0 = im_\pi a$ と置くと，

$$\cosh(m_\pi a) = 1 + \frac{1-16K^2}{8K^2(1-6K^2)}(1-4K^2) \qquad (6.1.26)$$

となり，パイ中間子の質量が K の関数として求められた．

この結果から以下のことがわかる．

1. $K = \pm\dfrac{1}{4}$ で $m_\pi a = 0$ となる．
2. $|K| > 1/4$ とすると $m_\pi^2 < 0$ となるので，パイ中間子はタキオンのように見える．
3. $m_\pi^2 = 0$ となる K を K_c と書き，臨界 (クリティカル)・ホッピング・パラメタと呼ぶ．上の結果から強結合の極限では $K_c(\beta=0) = 1/4$ となった．また，自由場の場合，クォークがゼロ質量になる点が K_c に対応していると考えられるので，$K_c(\beta=\infty) = \dfrac{1}{2(0+4)} = 1/8$ となるはずである．
4. $1/K - 1/K_c = 2m_q$ と置き，m_q とクォーク質量と考えることにすると，上の結果から $m_\pi^2 \propto m_q$ となるので，あたかも PCAC 関係式が成り立っ

ているように見える．このことは $K=K_c$ でカイラル対称性がほとんど回復しているという解釈を示唆している証拠と考えられて来た．

タキオンが現われてしまうのは場の理論としては望ましいものではない．タキオンの存在は基底状態の不安定性を意味しており，よりエネルギーの低い状態の存在を示唆している．タキオンの現われる条件，$|K|\geq 1/4$ は，真空期待値の計算で $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\psi\rangle\neq 0$ の解が許される条件と同じになっているが，実はこれは偶然ではない．両者の関係を次節で詳しく見ていく．その結果，上で述べた「$K=K_c$ でカイラルがほとんど回復しているのでは？」という疑問にたいする「解答」も与えられる．

次の章に移る前に，ρ 中間子の質量を計算しておこう．前と同様に $\vec{p}=0$ と取り，ベクター・テンソル (V-T) の 2 点関数の満たす方程式を考えると，

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1-4K^2(2+c_0) & -4K^2 is_0 \\ -4K^2 is_0 & 1-4K^2(1+c_0) \end{pmatrix}}^{D(p_0)} \begin{pmatrix} S_{V_kV_k} \\ S_{T_{k0}V_k} \end{pmatrix} = -4N_c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.1.27}$$

となる．ここで，$k=1,2,3$ であり，和は取っていない．$\det D(p_0=im_\rho)=0$ という条件より，

$$\cosh(m_\rho a) \;\; = \;\; 1+\frac{1-12K^2}{8K^2(1-6K^2)}(1-8K^2) \tag{6.1.28}$$

と ρ 中間子の質量が K の関数として求まる．$K=\pm\dfrac{1}{4}$ でパイ中間子の質量はゼロになるが，このとき，$\cosh(m_\rho a)=1+2/5$ となり，$m_\rho a\simeq 0.867$ と求まる．実際のパイ中間子の質量である 140MeV を与える K の値は $K=\pm\dfrac{1}{4}$ からほとんどずれないので，$K=\pm\dfrac{1}{4}$ での m_ρ を実験値の 770MeV と考えて良い．そうすると格子間隔 a(の逆数) は

$$770\text{ MeV } a = 0.867 \quad\Rightarrow\quad a^{-1}=0.89\text{GeV} \tag{6.1.29}$$

となる．$a^{-1}=1$GeV はほぼ $a=0.2$fm(1 fm$=10^{-15}$m) に対応するので，ウィルソン・クォークを用いた格子 QCD の強結合の極限での格子間隔は約 0.22fm であると言える．

§6.2　有効ポテンシャルの方法を使った解析

前章では，ウィルソン・クォークを用いた格子 QCD の強結合の極限に，ホッピング・パラメタ展開を組み合わせて，真空期待値や中間子の質量などを計算した．その計算でホッピング・パラメタ K を $1/4$ に取るとパイ中間子がゼロ質量になるようことがわかったが，$K > 1/4$ ではタキオンになってしまうという不自然な結果になってしまった．また，真空期待値もいくつかの可能性が残り，どの場合が実際に実現するのかはっきりしなかった．ここでは，理論の基底状態 (真空) の構造を決定するために，強結合極限でメソン場に対する有効ポテンシャルを計算する方法を紹介する．有効ポテンシャルを解析することで，真の基底状態を決定しメソン場の真空期待値を計算する．また，そこからの 2 次の揺らぎを考えることでメソンの質量を評価し，真空の構造と質量の関係を議論する．

§6.2.1　メソン場に対する有効ポテンシャルの定式化

まず始めに，有効ポテンシャルを定式化しよう．ウィルソン・クォークを用いた格子 QCD 作用を再び書き下すと，

$$S = S_F + S_G \tag{6.2.1}$$

$$\begin{aligned} S_F &= \sum_{n,f}(M_f + 4r)\bar{\psi}_n^f\psi_n^f \\ &- \sum_{n,\mu,f}\left[\bar{\psi}_n^f P_{-\mu}U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}}^f + \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}^f P_\mu U_{n,\mu}^\dagger \psi_n^f\right] \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

$$S_G = \frac{1}{g^2}\sum_{n,\mu\neq\nu}\mathrm{tr}\left[U_{n,\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U_{n+\hat{\nu},\mu}^\dagger U_{n,\nu}^\dagger\right] \tag{6.2.3}$$

となる．ここで，$f = 1, 2, \cdots, N_f$ は（アップ，ダウンなどの）クォークのフレーバーを表す添字であり，M_f はそのフレーバーに対応したクォークの質量である．また，$P_{\pm\mu} = \dfrac{r \pm \gamma_\mu}{2}$ と定義されるが，以下では簡単のために $r = 1$ と置いて計算をすすめる．この時，$P_{\pm\mu}$ は

$$P_{\pm\mu}^2 = P_{\pm\mu}, \quad P_{+\mu}P_{-\mu} = 0, \quad P_{+\mu} + P_{-\mu} = 1 \tag{6.2.4}$$

を満たす射影演算子になっている．また，ゲージ群は SU(N)(または U(N))

としておく．

ゲージ場を積分して，ハドロンの有効ポテンシャルを定式化していくのであるが，ここでは主にメソンに着目し，その有効ポテンシャルを計算する．(バリオンを含んだ取り扱いは文献 [39] を参照.）その場合はメソン場に対応するソース J を導入して，以下のような J に依存した分配関数を定義する．

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}U \exp\left[S_F + S_G + N\sum_n \mathrm{tr}\ J(n)M(n)\right] \quad (6.2.5)$$

ここで，

$$M^{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(n) = \frac{1}{N}\sum_c (\bar{\psi}_n)_c^{\hat{\alpha}}(\psi_n)_c^{\hat{\beta}} \quad (6.2.6)$$

はメソン場であり，添字 $\hat{\alpha},\hat{\beta}$ はスピノルとフレーバーの両方を表しており，$\hat{\alpha} = (\alpha, f)$ などを意味している．また，tr はその添字に関するトレースを意味する．一方，c はカラーの添字で和を取っており，したがって，メソン場 $M(n)$ は $4N_f \times 4N_f$ 行列で，かつゲージ不変になっている．

ここで，ゲージ場の積分を計算するわけだが，一般の場合に積分することは困難である．そこで，強結合の極限，すなわち，$g^2 \to \infty$ を考える．この極限では，$S_G \to 0$ となるから，積分が実行できて，

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} e^{N(J+\hat{M})M} \exp[\sum_{n,\mu} NW(\Lambda_{n,\mu})] \quad (6.2.7)$$

となる．ただし，

$$\begin{aligned}\hat{M}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} &= (M_f + 4r)\delta_{\alpha\beta}\delta_{fg} \\ \exp[\sum_{n,\mu} NW(\Lambda_{n,\mu})] &= \prod_{n,\mu}\int dU_{n,\mu} \exp[\mathrm{Tr}\ U_{n,\mu}V_{n,\mu} + Tr\overline{V}_{n,\mu}U^\dagger_{n,\mu}] \\ &\equiv \prod_{n,\mu} Z_{n,\mu} \quad (6.2.8)\end{aligned}$$

で与えられる．ここで，$\Lambda_{n,\mu} = V_{n,\mu}\overline{V}_{n,\mu}$ であり，Tr はカラーの添字のトレースである．そして，フェルミオン作用の形から

$$(V_{n,\mu})_{ab} = \sum_f (\bar{\psi}_n^f)_b P_{-\mu} (\psi_{n+\hat{\mu}}^f)_a \tag{6.2.9}$$

$$(\overline{V}_{n,\mu})_{ab} = \sum_f (\bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}^f)_b P_{+\mu} (\psi_n^f)_a \tag{6.2.10}$$

となることがわかる．付録 E で示したように $N \to \infty$ の極限では $W(\Lambda)$ の具体形は以下で与えられる．

$$W(\Lambda) = \mathrm{Tr}\left[(1+4\Lambda)^{1/2} - 1 - \ln\frac{1+(1+4\Lambda)^{1/2}}{2}\right] \tag{6.2.11}$$

したがって

$$\sum_{n,\mu} W(\Lambda_{n,\mu}^M) = -\mathrm{tr}\left[(1+4\Lambda_{n,\mu}^M)^{1/2} - 1 - \ln\frac{1+(1+4\Lambda_{n,\mu}^M)^{1/2}}{2}\right]$$

である．ここで，tr はフレーバー・スピノルの添字 $(\hat{\alpha} = (\alpha, f))$ に関するトレースで，マイナス符号は変数 $\Lambda_{n,\mu}$ から新しい変数

$$\Lambda_{n,\mu}^M \equiv M(n) P_{+\mu}^T M(n+\hat{\mu}) P_{-\mu}^T \tag{6.2.12}$$

に書き直す時にグラスマン数の交換によって生じたものである．ここで，$M(n)$ は前に定義したメソン場である．

式 (6.2.7) の被積分関数はメソン場 M の関数であるが，積分変数はクォーク場 $\psi, \bar{\psi}$ のままなので，そこも M に変換する．公式（付録 E 参照）

$$\int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} = \int \mathcal{D}M \exp\left[-N\sum_n \mathrm{tr}\ \ln M(n)\right] \tag{6.2.13}$$

を用いると最終的に

$$Z(J) = \int \mathcal{D}M \exp[N\{\sum_n \mathrm{tr}\ J_n M(n) + S_{\mathrm{eff}}(M)\}] \tag{6.2.14}$$

となる．ここで，有効作用 S_{eff} は

$$S_{\mathrm{eff}}(M) = \sum_n \mathrm{tr}\ [\hat{M}M(n) - \ln M(n)] + \sum_{n,\mu} W(\Lambda_{n,\mu}) \tag{6.2.15}$$

で与えられる．

§6.2.2 有効作用による真空の決定

$J=0$ の場合の分配関数は

$$Z(J=0) \quad = \quad \int \mathcal{D}M \exp[NS_{\text{eff}}(M)] \tag{6.2.16}$$

となるから，$N \to \infty$ では，

$$Z(J=0) \quad \sim \quad \exp[NS_{\text{eff}}(\bar{M})] \tag{6.2.17}$$

と評価される．ここで，$\bar{M}$ は $S_{\text{eff}}(M)$ の停留点である[1]．停留点 $\bar{M}$ はこの系の「基底状態」と考えることができる．

$\bar{M}(n)$ として，平行移動不変，回転（格子軸の入れ換え）不変な以下の形を仮定する．

$$\bar{M}(n)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \quad = \quad \delta_{fg}\sigma_f \left(\exp[i\theta_f\gamma_5]\right)_{\alpha\beta} \tag{6.2.18}$$

この形を S_{eff} に代入すると

$$S_{\text{eff}}(\bar{M}) = -4N_V \sum_f V_{\text{eff}}(\sigma_f, \theta_f) \tag{6.2.19}$$

$$V_{\text{eff}}(\sigma_f,\theta_f) = -M_f\sigma_f\cos\theta_f + \ln\sigma_f + 2\left[\sqrt{1-4\sigma_f^2\sin^2\theta_f} - 1 - \ln\left\{\frac{1+\sqrt{1-4\sigma_f^2\sin^2\theta_f}}{2}\right\}\right] \tag{6.2.20}$$

となる．ここで，N_V は 4 次元格子点の総数であり，V_{eff} は有効ポテンシャルである．極値を与える条件から，以下の方程式を得る．

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(\sigma_f,\theta_f)}{\partial\sigma_f} = -M_f\cos\theta_f + \frac{1}{\sigma_f} - \frac{8\sigma_f\sin^2\theta_f}{1+\sqrt{1-4\sigma_f^2\sin^2\theta_f}} = 0 \tag{6.2.21}$$

$$\frac{\partial V_{\text{eff}}(\sigma_f,\theta_f)}{\partial\theta_f} = \sin\theta_f\left[M_f\sigma_f - \frac{8\sigma_f^2\cos\theta_f}{1+\sqrt{1-4\sigma_f^2\sin^2\theta_f}}\right] = 0 \tag{6.2.22}$$

---

[1] $S_{\text{eff}}(M)$ は $-\log M(n)$ を含むため $M\to 0$ で $+\infty$ となる．したがって，S_{eff} の極値を与える点は，極大点ではなく停留点である．$N\to\infty$ の場合は問題ないが，$1/N$ 展開などをする場合は安定性などに注意が必要である．

この方程式を変形すると

$$M_f\sigma_f - \cos\theta_f = 0 \tag{6.2.23}$$

$$\sin\theta_f\left[\frac{8\sigma_f^2}{1+\sqrt{1-4\sigma_f^2\sin^2\theta_f}}-1\right] = 0 \tag{6.2.24}$$

となるが，この方程式の解は2つある．1つはすべての M_f で解になるもので，

$$\sigma_f = 1/M_f, \qquad \theta_f = 0 \tag{6.2.25}$$

と与えられる．もう1つは $M_f^2 \leq 4$ のみで解になり，

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{3}{16-M_f^2}} \tag{6.2.26}$$

$$\sin^2\theta_f = 4\frac{(4-M_f^2)}{16-M_f^2} \tag{6.2.27}$$

で与えられる．$M_f^2 \leq 4$ でどちらの解が真の基底状態に対応するかを見るために，ポテンシャルの値の差を計算すると，

$$V_{\text{eff}}(1/M_f, 0) - V_{\text{eff}}(\sigma_f, \theta_f) = \ln f(M_f) \tag{6.2.28}$$

$$f(M_f) = \left(\frac{12}{16-M_f^2}\right)^{3/2}\frac{2}{|M_f|} \tag{6.2.29}$$

となる．ここで，$f(M_f=\pm 2)=1$, $\frac{df(M_f)}{dM_f} \leq 0$ $(M_f^2 \leq 4)$ が言えるから，$f(M_f) \geq 1$ $(M_f^2 \leq 4)$ である．したがって，

$$V_{\text{eff}}(1/M_f, 0) - V_{\text{eff}}(\sigma_f, \theta_f) \geq 0 \tag{6.2.30}$$

なので，$\theta_f \neq 0$ の方が V_{eff} が小さく，真の基底状態になっている．この結果をもとのフェルミオン場の真空期待値として書き直すと

$$\frac{1}{4N}\langle\bar{\psi}^f i\gamma_5\psi^f\rangle = \sigma_f\sin\theta_f = \begin{cases} 0, & M_f^2 \geq 4 \\ \pm 2\dfrac{\sqrt{3(4-M_f^2)}}{16-M_f^2}, & M_f^2 < 4 \end{cases} \tag{6.2.31}$$

$$\frac{1}{4N}\langle\bar{\psi}^f \psi^f\rangle = \sigma_f\cos\theta_f = \begin{cases} \dfrac{1}{M_f}, & M_f^2 \geq 4 \\ \dfrac{3M_f}{16-M_f^2}, & M_f^2 < 4 \end{cases} \tag{6.2.32}$$

となる．$M_f^2 \leq 4$ では $\langle\bar{\psi}^f i\gamma_5\psi^f\rangle \neq 0$ であるから，パリティが自発的に破れていることになる．パリティが自発的に破れるという性質は前節のホッピング・パラメタ展開の計算でも起こっていた．(6.2.31) 式で ± が現われるのはパリティの Z_2 対称性のためであり，どちらを取るのかは（外場をかけない限り）決まらない．

上の結果は各フレーバー f に関してまったく独立なので，それぞれの f で ± の可能性がある．1 フレーバーの時は ± どちらでも問題はないが，2 フレーバー以上の時はどちらの符号をとるかが問題になるので，注意が必要である．現在，分かっていることをまとめておく．

1. フレーバー数 N_f が偶数ですべての M_f が等しい場合．例として，$N_f = 2$ の場合を考える．$\theta_1 = \theta_2$ と同符号だとすると，

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}i\gamma_5\mathbf{1}\psi\rangle &\neq 0 \\ \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^{\mathbf{a}}\psi\rangle &= 0\end{aligned} \tag{6.2.33}$$

となる．ここで，$\mathbf{1}$ はフレーバー空間での 2×2 の単位行列，$\tau^{\mathbf{a}}(a = 1,2,3)$ はフレーバー空間でのパウリ行列である．もし，$\theta_1 = -\theta_2$ と逆符号だと，

$$\begin{aligned}\langle\bar{\psi}i\gamma_5\mathbf{1}\psi\rangle &= 0 \\ \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^{\mathbf{1,2}}\psi\rangle &= 0 \\ \langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^{\mathbf{3}}\psi\rangle &\neq 0\end{aligned} \tag{6.2.34}$$

となるので，物理的な意味が変わってくる．前者ではフレーバー一重項が期待値を持つのでパリティ対称性が破れるだけだが，後者はフレーバー多重項が期待値を持つので，パリティとフレーバー対称性が同時に破れ

てしまう．一方，フレーバー数が偶数の場合は $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\mathbf{1}\psi\rangle$ は常にゼロであることが厳密に証明できるので，この場合は後者の真空が実現されることがわかる．実際，$1/N$ や $1/g^2$ の高次項を計算すると後者の真空のエネルギーが低くなることが示される．この解の物理的意味についてはまた後で詳しく考察する．

2. N_f が奇数の時もいろいろな可能性がある．例えば，$N_f = 3$ の時は $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ や $\theta_1 = \theta_2 = -\theta_3$ などである．前者ではフレーバー対称性は破れないが，後者では破れる．偶数の時との違いは，フレーバー一重項の期待値が常にゼロでないということで，このことは，パイ中間子などの擬スカラー中間子の質量が実験でわかっている性質と違ってしまうことを意味しているので，実はあまり望ましいことではない[2]．実際にどのような期待値が実現しているのかは未だにわかっておらず，未解決の問題である．

§6.2.3　パイ中間子の質量の計算

さて次に中間子の質量を計算しよう．ここでは，簡単のためにすべての f で $M_f = M$ と等しい場合を考える．メソンの質量を計算するために，有効作用を真空 $\bar{M}(n)$ のまわりで以下のように展開する．

$$S_{\text{eff}}(M) \;=\; S_{\text{eff}}(\bar{M}(n)) + \sum_{k=2}^{\infty}\sum_{n_1,\cdots,n_k} S_{\text{eff}}^{(k)}(n_1,\cdots,n_k)\Pi(n_1)\cdots\Pi(n_k) \tag{6.2.35}$$

ここで，$\Pi(n) = M(n) - \bar{M}(n)$ であり，また，

$$S_{\text{eff}}^{(k)}(n_1,n_2,\cdots,n_k) \;=\; \frac{1}{k!}\left.\frac{\partial^k S_{\text{eff}}}{\partial M(n_1)\partial M(n_2)\cdots\partial M(n_k)}\right|_{M(n)=\bar{M}(n)} \tag{6.2.36}$$

と定義した．$\bar{M}(n)$ を決める条件から $S_{\text{eff}}^{(1)}(n) = 0$ である．メソンの質量を計算するために，真空からのずれ $\Pi(n)$ が微小な場合を考え，$O(\Pi^3)$ を無視

[2] $M_f^2 = 4$ でフレーバー多重項の擬スカラー中間子だけでなく一重項の中間子までゼロ質量になってしまう．

する．この時，

$$S_{\text{eff}}(M) - S_{\text{eff}}(\bar{M}(n)) = \sum_{n,m} S_{\text{eff}}^{(2)}(n,m)\Pi(n)\Pi(m)$$

$$= N_f \sum_{a=0}^{N_f^2-1} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Big[A\,\mathrm{Tr}\,\Pi^a(-p)e^{-i\theta\gamma_5}\Pi^a(p)e^{-i\theta\gamma_5}$$

$$- B\sum_\mu \mathrm{Tr}\,\left[\Pi^a(-p)\gamma_5\Pi^a(p)\gamma_5 + \Pi^a(-p)\gamma_5\gamma_\mu^T\Pi^a(p)\gamma_5\gamma_\mu^T\right]$$

$$- C\sum_\mu \mathrm{Tr}\,\Pi^a(-p)(1+\gamma_\mu^T)\Pi^a(p)(1-\gamma_\mu^T)e^{ip_\mu}\Big] \quad (6.2.37)$$

となる．ここで，

$$\Pi(n)_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} = \sum_p e^{ip_\mu n} \sum_{a=0}^{n_f^2-1} \Pi(p)^a_{\alpha\beta}(\tau^a)_{fg} \quad (6.2.38)$$

のようにフレーバーの添字 f, g に関して，τ^a を用いて展開した．$\tau^0 = \mathbf{1}$ であり，また，$\tau^a(a = 1, 2, \cdots, N_f^2 - 1)$ は SU(N) の生成子で tr $\tau^a\tau^b = N_f\delta_{ab}$ を満たしている．また，Tr はスピノルのトレースを意味する．定数 A, B, C は

$$A = \frac{1}{2\sigma^2} \quad (6.2.39)$$

$$B = \frac{\sigma^2\sin^2\theta}{[1+\sqrt{1-4\sigma^2\sin^2\theta}]^2}\frac{1}{\sqrt{1-4\sigma^2\sin^2\theta}} \quad (6.2.40)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{4(1-4\sigma^2\sin^2\theta)}} \quad (6.2.41)$$

で与えられる．上の式はフレーバー行列の添字 a に関して独立なので，$N_f = 1$ を考えれば十分である．そこで，以下では添字 a を省略する．

$$\Gamma^S = \frac{1}{2}\mathbf{1}, \quad \Gamma^P = \frac{1}{2}\gamma_5, \quad \Gamma^{A(\mu)} = \frac{i}{2}\gamma_\mu^T\gamma_5$$

$$\Gamma^{V(\mu)} = \frac{1}{2}\gamma_\mu^T, \quad \Gamma^{T(\mu\nu)} = \frac{1}{2\sqrt{2}i}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad (6.2.42)$$

で与えられるスピノル空間の基底 $\{\Gamma^X\}$ を用いて，

$$\Pi(p) = \sum_X \Pi_X(p)\Gamma^X \tag{6.2.43}$$

と展開したものを代入すると，

$$\sum_{n,m} S_{\rm eff}^{(2)}(n,m)\Pi(n)\Pi(m) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sum_{X,Y} \Pi_X(-p) D_{XY}(p) \Pi_Y(p) \tag{6.2.44}$$

となる．ここで，

$$D_{XY}(p) = \begin{pmatrix} D_{SPA}(p) & 0 \\ 0 & D_{VT}(p) \end{pmatrix}$$

であり，その具体形は，Scalar・Pseudo-scalar・Axial-vector(SPA) 成分に対して

$$D_{SPA} = \begin{pmatrix} D_{SS} & D_{SP} & D_{SA(\nu)} \\ D_{PS} & D_{PP} & D_{PA(\nu)} \\ D_{A(\mu)S} & D_{A(\mu)P} & D_{A(\mu)A(\nu)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A\cos 2\theta & -iA\sin 2\theta & 0 \\ -iA\sin 2\theta & (A\cos 2\theta - 8B - 2C\sum_\rho \cos p_\rho) & 2C\sin p_\nu \\ 0 & -2C\sin p_\mu & \delta\mu\nu(A+2B-2C\cos p_\mu) \end{pmatrix}$$

となり，Vector・Tensor(VT) 成分に対しては

$$D_{VT} = \begin{pmatrix} D_{V(\mu)V(\nu)} & D_{V(\mu)T(\alpha\beta)} \\ D_{T(\gamma\omega)V(\nu)} & D_{T(\gamma\omega)T(\alpha\beta)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu}(A+6B-2C\sum_\rho \cos p_\rho) & \sqrt{2}C(\delta_{\mu\alpha}\sin p_\beta - \delta_{\mu\beta}\sin p_\alpha) \\ -\sqrt{2}C(\delta_{\nu\gamma}\sin p_\omega - \delta_{\nu\omega}\sin p_\gamma) & \frac{1}{2}\{-iAe^{\gamma\omega\alpha\beta} + (\delta_{\gamma\alpha}\delta_{\omega\beta} - \delta_{\gamma\beta}\delta_{\omega\alpha}) \\ & \times[A\cos 2\theta - 4B - 2C(\cos p_\gamma + \cos p_\omega)]\} \end{pmatrix}$$

となる．ここで，Scalar と Pseudo-scalar に混合が起こっているのは，パリティが破れた（$\theta \neq 0$ の）結果である．

　メソンの分散関係は $\det D(p) = 0$ で与えられるので，$p_k = 0 (k = 1, 2, 3)$，$p_4 = im_\pi$ (SPA 成分) あるいは im_ρ (VT 成分) と置いてこの方程式を解くと，

$$\cosh m_\pi = \begin{cases} 1 + \dfrac{(M^2-4)(M^2-1)}{2M^2-3} & M^2 \geq 4 \\ 1 + \dfrac{2(4-M^2)(16-M^2)(8+M^2)}{15M^4-64M^2+256} & M^2 < 4 \end{cases} \tag{6.2.45}$$

$$\cosh m_\rho = \begin{cases} 1 + \dfrac{(M^2-3)(M^2-2)}{2M^2-3} & M^2 \geq 4 \\ 1 + \dfrac{E}{6} & M^2 < 4 \end{cases} \tag{6.2.46}$$

と π メソンと ρ メソンの質量が求まる．ただし

$$E = \frac{(13M^4+112M^2-512)^2+192M^2(4-M^2)(8+M^2)^2}{(25M^4+208M^2-512)(13M^4+112M^2-512)+384M^2(4-M^2)(8+M^2)^2}$$

である．$K = \dfrac{1}{2M}$ であることに注意すると，$M^2 > 4$ の場合の結果はホッピング・パラメタ展開によって得られた結果，式 (6.1.26,6.1.28) と一致している．したがって，確かに，パリティ・フレーバー対称性の自発的破れが起こり始める $M^2 = 4$ では $m_\pi = 0$ となっている．また，対称性の破れを考慮していないホッピング・パラメタ展開の計算では $M^2 < 4$ の時，パイ中間子はタキオンになってしまったが，パリティ・フレーバーの破れを取り入れた今回の計算では，常に $m_\pi^2 \geq 0$ でありタキオンは現れない．つまり，タキオンの存在は，(対称性の破れない) 真空の不安定性を示しており，したがって，(対称性が破れている) エネルギーのより低い安定した真空が存在することを意味していたわけである．

§6.3　ウィルソン・フェルミオンを使った格子 QCD の相構造

§6.3.1　ゼロ質量のパイ中間子と相転移

これまでに見てきたように，ウィルソン・フェルミオンを使った格子 QCD の強結合の極限ではクォーク質量（ホッピング・パラメタ）を調節することでパイ中間子の質量をゼロにすることができた．そして，有効ポテンシャルの解析から，$M = M_c(K = K_c)$ において対称性の破れに伴う相転移が起こり，その結果，$M < M_c$ において離散的対称性であるパリティが自発的に破れることもわかった．つまり，$\langle i\bar{\psi}\gamma_5\psi\rangle \neq 0$ とパリティ対称性の秩序変数が

ゼロでない値を持つわけである．

さて，この「パイ中間子の質量がゼロになる機構」を強結合の極限だけでなく，より一般の場合に考えよう．そのために，フレーバー数が $2(N_f=2)$ の場合を考える．このとき，フレーバー3重項であるパイ中間子を記述する演算子は

$$\pi^a(x) \;=\; \bar{\psi} i\gamma_5\tau^a\psi(x) \tag{6.3.1}$$

で与えられる．ここで，$\tau^a(a=1,2,3)$ は 2×2 のフレーバー空間のパウリ行列である．クォーク質量 M が大きい時にパイ中間子の2点関数を計算すると，

$$\sum_{\vec{x}}\langle\pi^a(\vec{0},0)\pi^a(\vec{x},t)\rangle \;\simeq\; Ze^{-m_\pi t}, \quad M>M_c \tag{6.3.2}$$

と t に関して指数関数的に減少し，この振る舞いから質量 m_π が決定できる．$M=M_c$ では $m_\pi=0$ となるのだから，2点関数は

$$\sum_{\vec{x}}\langle\pi^a(\vec{0},0)\pi^a(\vec{x},t)\rangle \;\simeq\; Z|t|^{-\alpha}, \quad M=M_c \tag{6.3.3}$$

と t に関して冪乗の振る舞いを示す．ここで，正の量 α は統計力学の相転移現象に現われる臨界指数のひとつである．さて，$M<M_c$ とするとどうなるであろうか？ ここで，相転移の研究で良く知られたイジング・スピンの温度に対する振る舞いを思い出して欲しい．十分高温で2つのスピンの相関関数（2点関数）を計算すると，2つのスピン間の距離に対して指数関数的に減衰するが，臨界温度ではその減衰はたかだか距離の（負）の冪乗にしかならない．このことはスピンの相関距離が無限大になっていることを意味している．ここで温度を臨界温度以下にすると，この大きな相関距離が原因で長距離秩序が出現する．つまり，イジング模型の Z_2 対称性が自発的に破れてひとつのスピンの真空期待値がゼロでなくなるのである．

この考えをパイ中間子に適用すると，$M<M_c$ では，

$$\sum_{\vec{x}}\langle\pi^a(\vec{0},0)\pi^a(\vec{x},t)\rangle \;\simeq\; V\langle\pi^a\rangle^2+Z'e^{-m_\pi t}, \quad M<M_c \tag{6.3.4}$$

となるはずである．ここで $V=\sum_{\vec{x}}$ は空間体積である．この時，$\langle\pi^a\rangle\neq 0$

であるが，理論のフレーバー対称性を使えば一般性を失うことなく

$$\langle \pi^3 \rangle \neq 0, \qquad \langle \pi^{1,2} \rangle = 0 \tag{6.3.5}$$

としてよい．$\langle \pi^3 \rangle = \langle \bar{\psi} i \gamma_5 \tau^3 \psi \rangle \neq 0$ という真空期待値は，QCD が持っている (そしてウィルソン・フェルミオンの格子 QCD においても保たれている) パリティ・フレーバー対称性を自発的に破っている[3]．つまり,「ウィルソン・フェルミオンを使った格子 QCD に現われるゼロ質量のパイ中間子は，パリティ・フレーバー対称性の自発的破れを起こす 2 次相転移に伴うゼロ質量粒子である」ということができる．

連続極限のところで述べたように，2 次以上の相転移の転移点直上では相関距離 ξ は発散するが，ここではまさしく $m_\pi = 1/\xi$ なので，パイ中間子がゼロ質量になるのである．この解釈によって，ゼロ質量のパイ中間子の出現が自然に説明されることになる．さらに，この解釈から以下のようなことも導ける．

1. 2 次（以上）の相転移では相関距離 ξ は $\xi \sim (M - M_c)^{-\nu}$ で発散する．ここで ν は臨界指数の 1 つである．したがって，$M \simeq M_c$ では

$$m_\pi^2 \simeq A(M - M_c)^{2\nu}$$

と振る舞うはずである．パイ中間子の（有効）理論は 4 次元のボソンの理論であるから,（対数補正を除いて）平均場近似の結果 $\nu = 1/2$ が成り立つはずである．これは

$$m_\pi^2 \simeq A(M - M_c)$$

を意味するから，クォーク質量を $m_q^R = M - M_c$ と再定義すれば，QCD において期待される PCAC 関係式[4]が（カイラル対称性を使わずに）示せたことになる．

2. $M > M_c$ では $m_{\pi^0} = m_{\pi^\pm} > 0$ [5]，また，$M = M_c$ で $m_{\pi^0} = m_{\pi^\pm} = 0$

[3] ここでは，γ_5 がパリティを破り，τ^3 がフレーバー対称性を破っている．

[4] ウィルソン・フェルミオンのところで述べたように，連続理論の QCD ではカイラル対称性を使うと $m_\pi^2 = A m_q^R$ を示すことができる．この関係式を PCAC 関係式という．

[5] ここで π^0 は中性パイ中間子で τ^3 に対応し，$\pi^\pm$ は荷電パイ中間子で $\tau^\pm = (\tau^1 \pm i\tau^2)/\sqrt{2}$ に対応する．

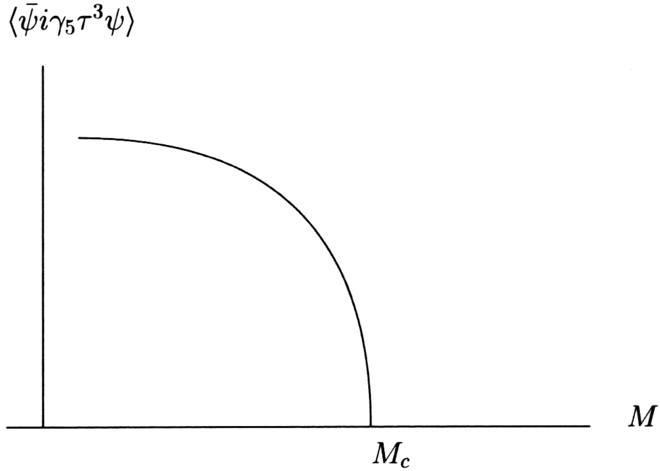


図 6.5：パリティ・フレーバー対称性の破れの秩序変数 $\langle \bar{\psi} i\gamma_5 \tau^3 \psi \rangle$ の M 依存性の模式図. $M = M_c$ が相転移点であり, $M < M_c$ では $\langle \bar{\psi} i\gamma_5 \tau^3 \psi \rangle \neq 0$ となり, パリティ・フレーバー対称性が自発的に破れる.

であるが, $M < M_c$ では, $m_{\pi^0} > 0$, $m_{\pi^\pm} = 0$ となる. $m_{\pi^\pm} = 0$ となるのは, 荷電パイ中間子 $\pi^\pm$ が（パリティ・）フレーバー対称性の自発的破れ伴う南部・ゴールドストン粒子だからである.

3. 連続理論の QCD においては, パイ中間子などのフレーバー多重項（SU(N) 部分）の質量が軽い一方でフレーバー 1 重項（$U(1)$ 部分）の質量が重くなることを示さなければならなかった. これは $U(1)$ 問題と呼ばれている. フレーバー 1 重項に対応する演算子は $\bar{\psi}\gamma_5\psi$ であるが, パリティ・フレーバー対称性の自発的破れというシナリオでは, この粒子が軽くなる理由はまったくない. 実際, すべての M で $\langle \bar{\psi}\gamma_5\psi \rangle = 0$ となることが厳密に証明できるので [51] 1 重項の質量 m_η はゼロにならないことがわかる. したがって, このシナリオでは $U(1)$ 問題は自然に解決される.

上の考察で予言される真空期待値 $\langle \bar{\psi} i\gamma_5 \tau^3 \psi \rangle$ や質量 $m_{\pi^0}, m_{\pi^\pm}, m_\eta$ の M 依存性を, 図 6.5 や図 6.6 に模式的に描いておくので, 参照して欲しい.

この相転移が起こる理由の直感的な理解は次の通りである. QCD においてカイラル対称性が厳密に定義でき, それが自発的に破れたとすると, クォー

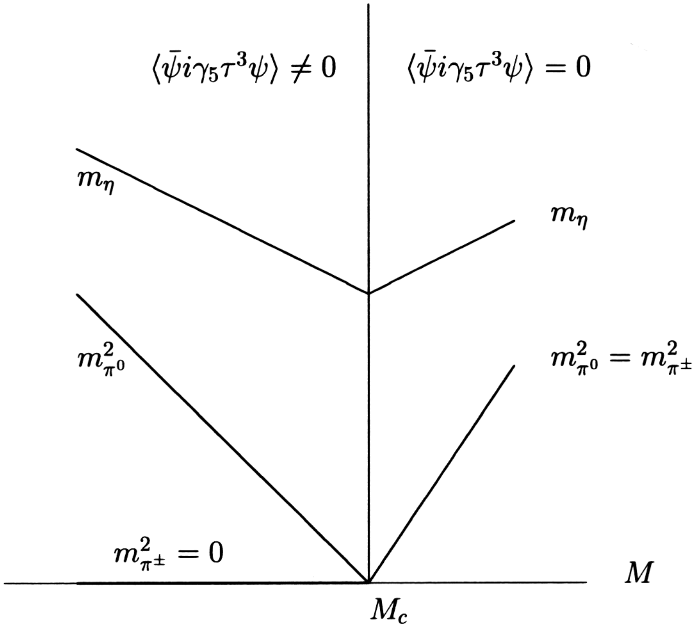


図 6.6：パイ中間子の質量の M 依存性の模式図．相転移点 $M = M_c$ でフレーバー多重項 (π^0,$\pi^\pm$) の質量はゼロになるが，1 重項 (η) は相転移と関係ないのでその質量はゼロとはならない．$M > M_c$ ではフレーバー対称性のために $m^2_{\pi^0} = m^2_{\pi^\pm}$ であるが，$M < M_c$ ではフレーバー対称性が破れるので $m^2_{\pi^0} \neq m^2_{\pi^\pm}$ である．$M < M_c$ で $m^2_{\pi^\pm} = 0$ となるのは $\pi^\pm$ がパリティ・フレーバー対称性の自発的破れに伴う南部・ゴールドストン粒子だからである．

ク質量がゼロの時は無数の縮退した基底状態が存在し，真空は一意的には決まらないはずでる．通常はわずかな正のクォーク質量 M を導入し，それをゼロにする極限を考えるのであるが，その極限では $\langle\bar{\psi}\psi\rangle > 0$ となり，パリティやフレーバー対称性を破る真空期待値はゼロになっている．つまり，パリティやフレーバー対称性を保つ真空を手で選ぶわけである．

ところが，ウィルソン・フェルミオンの格子 QCD の場合は，カイラル対称性を壊すウィルソン項によって縮退は解かれるので，真空は一意的に決まるはずである．この時 $M = 0$ としても $\langle\bar{\psi}\psi\rangle > 0$ となるだけで，パイ中間子はゼロ質量にならないが，M をさらに負の値に減らしていくと $M = M_c$

でパイ中間子はゼロ質量になる．$M < M_c$ ではパイ中間子はタキオンになるが，これは真空が不安定でポテンシャルのパイ中間子の方向 $(\bar{\psi}\gamma_5\tau^3\psi)$ の 2 次曲率が負であることを示しており，正しい真空が $\langle\bar{\psi}\gamma_5\tau^3\psi\rangle \neq 0$ にあることを意味している．これがパリティ・フレーバー対称性の自発的破れの直感的な理解である．

パリティ・フレーバー対称性の自発的破れの存在は，前に述べた強結合展開やグロス・ヌボー模型などでの解析計算 [43, 44] 以外にも，格子 QCD の数値計算 [45, 46]，非線型シグマ模型を使った一般論 (カイラル摂動論の拡張)[50] などでも確認されている．

§6.3.2 ウィルソン・フェルミオンの相構造

ウィルソン・フェルミオンにおける相転移の機構が分かって来たので，g^2-M というパラメタ空間での相構造を考えよう．ここで $M = ma + 4(r = 1$ と置いた）と定義する．強結合の極限では $M_c^{\pm} = \pm 2$ で相転移が起こり，$M_c^- < M < M_c^+$ でパリティ・フレーバー対称性が自発的に破れる．強結合展開の結果 [43, 44] から，$M_c(g^2)$ はより絶対値の大きい方に曲がっていくこともわかる．また，弱結合の極限では，ダブラーも含めると一般に $M = ma + \sum_\mu (1 - \cos p_\mu) + 4$ であるから，$M_c = 4, 2, 0, -2, -4$ がゼロ質量（$ma = 0$）のクォークに対応している．縮退度は $1, 4, 6, 4, 1$ で合計では 16 である．

この 2 つの極限の結果から全体の相構造はどのように予想できるであろうか？ その助けになるのは 2 次元の Gorss-Neveu model の相構造の結果である．(このモデルの詳しい解析は付録 F とそこに載せた図 F.1 を見て欲しい.) これらの結果から予想された 2 フレーバーの格子 QCD の相構造の模式図を図 6.7 に与える．

この相構造の特徴は以下の通りである．

- 強結合極限（$g^2 = \infty$）では中性パイ中間子がゼロ質量になる臨界クォーク質量 M_c は $M_c = 2, -2$ であることが解析的計算でわかっている．$M_c = 2$ が連続理論の $m \to 0^+$ に $M_c = -2$ が連続理論の $m \to 0^-$ に対応している．そして領域 $-2 < M < 2$ はパリティ・フレーバー対称

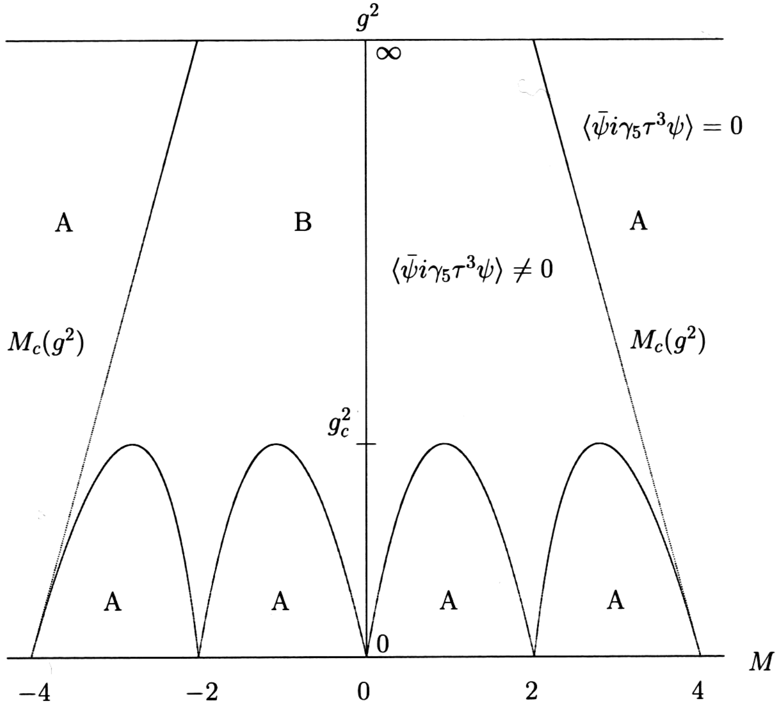


図 6.7：$r = 1$ のウィルソン・フェルミオンを用いた格子 QCD の M–g^2 平面における相構造の模式図．ただし，$M = ma + 4$ であり，相構造は左右対称 ($M \to -M$ で不変) になる．物理的なフェルミオンの連続極限 ($g^2 \to 0$) は $M \simeq 4$ である．相転移線 $M_c(g^2)$ は強結合側 ($g^2 > g_c^2$) では 2 本，弱結合側 ($g^2 > g_c^2$) では 10 本あり，その上でパイ中間子の質量はゼロになる．領域 A では $\langle \bar{\psi} i\gamma_5 \tau^3 \psi \rangle = 0$ であるが，$M_c(g^2)$ で囲まれた領域 B では $\langle \bar{\psi} i\gamma_5 \tau^3 \psi \rangle \neq 0$ となりパリティ・フレーバー対称性が自発的に破れ，そこでは $m_{\pi^\pm}^2 = 0$ である．

性が自発的に破れた相であり，$\langle \bar{\psi} i\gamma_5 \tau^3 \psi \rangle \neq 0$ となる．

- 弱結合極限（$g^2 = 0$）ではゼロ質量のクォークが現れる M で中性パイ中間子がゼロ質量になる．タブラーも含めると $M_c = 4, 2, 0, -2, -4$ の 5 個所である．そしてそれぞれの M_c の近傍（$g^2 << 1$）では 2 本の相転移線 $M_c(g^2)$ が存在し，その間がパリティ・フレーバー対称性が自発的に破れた相である．2 本ある線はやはり $m \to 0^\pm$ に対応してい

る．この相構造は，M を調整することにより連続極限（格子 QCD の場合は $g^2 \to 0$）で 2 フレーバーの「物理的な」理論だけでなく，例えば $M \simeq 2$ では $8(= 2 \times 4)$ フレーバーのダブラーの理論が構成できることを意味している．

- 結合定数の中間領域 $(g^2 \simeq g_c^2 \simeq 1)$ では強結合から弱結合になるにしたがって相転移線 $M_c(g^2)$ の数が 2 本から 10 本に変化する．したがって，この領域を境に，強結合側では物理的粒子とダブラーの区別は明確になっていないと考えられる．逆に言えば，これより弱結合側では格子間隔 a が小さくなるので，ダブラー質量に対するウィルソン項の寄与 r/a が大きくなり，物理的粒子とダブラーの分離が起こり，それが相構造の変化になったと考えられる．

この相構造は後の章でも重要になってくるので覚えておいていただきたい．

§6.3.3　相転移の秩序変数とゼロ固有値

QCD においてはカイラル対称性の自発的破れを表す秩序変数 $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ とディラック演算子のゼロ固有値との間には関係があった．ここではパリティ・フレーバー対称性の自発的破れを表す秩序変数 $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle$ とウィルソン・フェルミオン演算子のゼロ固有値との関係を考察する．

そのために，秩序変数に対する「外場」H を加えたウィルソン・フェルミオン作用

$$S \;=\; \bar{\psi}\left(D_{\mathrm{W}}(M) + i\gamma_5\tau^3 H\right)\psi \tag{6.3.6}$$

を考察する．ここで $D_{\mathrm{W}}(M)$ は（質量パラメータ M を持つ）ウィルソン・フェルミオン演算子であり，添字や和の記号は省略した．$D_{\mathrm{W}}(M)$ は $D_{\mathrm{W}}^\dagger(M) = \gamma_5 D_{\mathrm{W}}(M)\gamma_5$ を満たすので，$H_{\mathrm{W}}(M) = \gamma_5 D_{\mathrm{W}}(M)$ はエルミート演算子となる．$H_{\mathrm{W}}(M)$ はエルミート化されたウィルソン・ディラック演算子と呼ばれている．

この作用を使うと秩序変数は次のように計算される．(簡単のために，パラメータ M に対する依存性は省略して書いていないことに注意.)

$$
\begin{aligned}
\lim_{H\to 0}\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle &= -\lim_{H\to 0}\mathrm{Tr}\ i\gamma_5\tau^3\frac{1}{D_{\mathrm{W}}+i\gamma_5\tau^3 H} \\
&= -\lim_{H\to 0}\mathrm{tr}\ i\gamma_5\left[\frac{1}{D_{\mathrm{W}}+i\gamma_5 H}-\frac{1}{D_{\mathrm{W}}-i\gamma_5 H}\right] \\
&= -\lim_{H\to 0} i\mathrm{tr}\ \left[\frac{1}{H_{\mathrm{W}}+iH}-\frac{1}{H_{\mathrm{W}}-iH}\right] \\
&= -\lim_{H\to 0} i\sum_{\lambda}\langle\lambda|\left[\frac{1}{\lambda+iH}-\frac{1}{\lambda-iH}\right]|\lambda\rangle \\
&= -\lim_{H\to 0} i\int d\lambda\rho(\lambda)\left[\frac{1}{\lambda+iH}-\frac{1}{\lambda-iH}\right] \\
&= -2\pi\rho(0)
\end{aligned}
\tag{6.3.7}
$$

ここで Tr はすべての自由度に関するトレースを，tr はフレーバー以外の自由度のトレースを表す．また，λ は H_{W} の固有値で $|\lambda\rangle$ はその固有関数，ρ はその状態密度で

$$\rho(\lambda)=\sum_{\lambda'}\delta(\lambda-\lambda')$$

と定義される．なお，最後の結果を得るのに，デルタ関数の定義

$$2\pi\delta(x)=i\lim_{\epsilon\to 0}\left[\frac{1}{x+i\epsilon}-\frac{1}{x-i\epsilon}\right]$$

を用いた．

上の結果は，秩序変数 $\langle\bar{\psi}i\gamma_5\tau^3\psi\rangle$ の値がエルミート化されたウィルソンフェルミオンの演算子のゼロ固有値密度で与えられることを示している．この性質も後の考察で重要になってくる．

第 7 章

新しいフェルミオンの定式化：ドメインウォール・フェルミオン

第 5 章で考察してきたように，格子上でカイラル対称を保つことは簡単でない．これは，アノマリーが関係しているのでいたしかたのないことではあるが，このことは QCD の力学的性質を調べる上で望ましいものではない．例えば，N_f のクォークが強い相互作用をしている量子色力学 (QCD) を考えるとすると，そのフレーバー (flavor)・カイラル対称性は（カイラル $U(1)$ がアノマリーで壊れていることを考慮すると）$U(N_f) \otimes SU(N_f)$ であり，この対称性がフレーバー $U(N_f)$ に自発的に破れることで $N_f^2 - 1$ 個の南部・ゴールドストン粒子が現れるはずである．ところが，格子上ではカイラル $SU(N_f)$ は対称性でないので南部・ゴールドストン粒子はゼロ質量にはならず，パイ中間子の質量が小さいことを対称性からは説明できない[1]．

アノマリーだけを考えると $U(1)$ だけを破って $SU(N_f)$ を保つような格子フェルミオンができそうであるが，ひとつのフレーバーに注目するとそのカイラル変換が $U(1)$ なのか $SU(N_f)$ なのかを区別することはできないので，$SU(N_f)$ だけを保つような格子フェルミオンは，あったとしてもきわめて特殊なものになってしまう可能性が高い．

ニールセン・二宮の定理がある以上，定理の仮定を壊さない限り，ダブリング問題は回避できない．ニールセン・二宮の定理を逃れて，格子上のカイラルフェルミオンを定式化しようとする多くの試みが今までなされてきたが，いずれも成功しなかった．ところが，最近，新しい提案がなされ，それによって

[1] ウィルソン・フェルミオンの場合は，これに代わる説明としてパリティ・フレーバー対称性の破れがあることは前章で見た通りである．

この問題がほぼ解決されようとしている．そこで，ここではドメインウォールと呼ばれるその新しい格子フェルミオンの定式化について紹介する．

§7.1 ドメインウォール・フェルミオンとは？

ドメインウォール・フェルミオンはカプラン (Kaplan) によって提唱された方法である [52]．彼のアイデアは，4次元のカイラルフェルミオンを構成するのに5次元の非常に重いフェルミオンから出発するという奇抜なものであった．まずはじめに彼のアイデアを連続理論の場合で説明しよう．

5次元のフェルミオンの自由場の作用を

$$S = \int d^4x ds \bar{\psi}(x,s) \left[\sum_{\mu=1}^{5} \gamma_\mu \partial_\mu - m(s)\right] \psi(x,s) \qquad \textbf{(7.1.1)}$$

とする．ここで，x は4次元の座標，s は5次元目の座標であり，通常の5次元のフェルミオンとの違いは，その質量項が s 依存性を持ち，

$$m(s) = m_0 \epsilon(s) = \begin{cases} m_0 & s > 0 \\ 0 & s = 0 \\ -m_0 & s < 0 \end{cases}$$

で与えられることである．この作用がカイラルフェルミオンを記述していることを見るために, 運動方程式

$$\left[\sum_{\mu=1}^{5} \gamma_\mu \partial_\mu - m(s)\right] \psi(x,s) = 0$$

の変数分離解 $\psi(x,s) = \phi(x) f(s)$ を考える．ただし，$f(s)$ はスカラー関数であり，フェルミオンのスピノル成分はすべて $\phi(x)$ に含まれるとする．

4次元部分は平行移動不変だから，平面波展開 $\phi(x) = u(p)e^{ipx}$ を考えると上の方程式は以下のようになる．

$$[\sum_{\mu=1}^{4} i\gamma_\mu p_\mu]\ u(p)\ f(s) + [\gamma_5 \partial_s f(s) - m(s) f(s)]\ u(p) = 0\,.$$

したがって，$u(p)$ がゼロ質量のディラック方程式

$$[\sum_{\mu=1}^{4} i\gamma_\mu p_\mu]\, u(p) = 0$$

を満たす条件は

$$\gamma_5 u(p) = \pm u(p) \tag{7.1.2}$$

$$\pm\partial_s f(s) - m(s) f(s) = 0 \tag{7.1.3}$$

となる．2番目の方程式の解は $f(s) = C\exp[\pm m_0|s|]$ （C は定数）で与えられるから，$m_0 > 0$ の時は $f(s) = C\exp[-m_0|s|]$ のみが規格化可能な解になる．この時 $\gamma_5 u(p) = -u(p)$ だから，$u(p)$ は左巻きのゼロ質量のスピノル, つまりカイラルフェルミオンを記述している．($m_0 < 0$ なら，$u(p)$ は右巻きのカイラルフェルミオンである.）s が大きくなると $f(s)$ は指数関数的に減少するので，m_0 が大きければ $f(s)$ はほとんど $s = 0$ に局在している．(図 7.1 を参照.）したがって，$\psi(x, s) = u(p)f(s)e^{ipx}$ は $s = 0$ の4次元超平面に局在した左巻きのカイラルフェルミオンを記述している！

このように，5次元のフェルミオンに5次元座標に関して1つの領域でプラス, もう一方の領域でマイナスの質量を与えると, その境界である4次元のドメインにカイラルフェルミオンが現れる．これが，ドメインウォール・フェルミオンという名前の由来である．

カプランはこのアイデアを5次元格子のウィルソン・フェルミオンに適用し, $s = 0$ にカイラルフェルミオンが構成できることを示した．そして，そのフェルミオンをゲージ場と相互作用させれば，左巻きのフェルミオンだけがゲージ相互作用をするカイラルゲージ理論が格子上に定式化できる可能性を指摘した．

しかしながら，カプランのこの期待が実現されるのはそれほど簡単ではないことがわかってきた．格子上で理論を定義するとき，はじめは有限の大きさの時空間を考えるので，5次元目の方向も有限の大きさとなる．この場合，何らかの境界条件を課すことが必要となる．普通は空間全体に関する（バルクな）物理量のみを考えるので，境界条件の違いは無限体積では問題にならない．しかし，今の場合は5次元理論の4次元の「境界」の性質が問題なので，5次元方向の境界条件を無視するわけにはいかない．もし，周期的境界条件を取ると，5次元方向の大きさを $-N_s < s < N_s$ として $m(s + 2N_s) = m(s)$

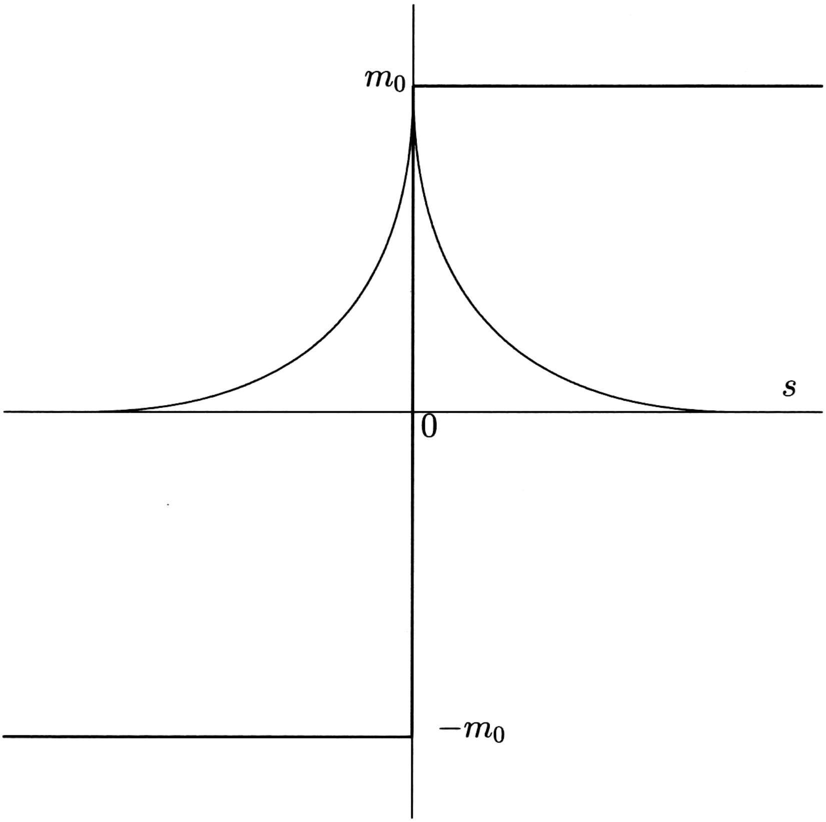


図 7.1：5 次元の質量項の関数形 $m_0\epsilon(s)$ と $s=0$ 付近に局在する規格化可能な固有関数 $f(s)=C\exp[-m_0|s|]$ の模式図.

となるから，$m(s=0)$ だけでなく $m(s=N_s)$ にも境界ができ，その符号は $m(s=0)$ とは逆になっている（図 7.2）．前の議論を適用すると， $s=0$ に左巻きのカイラルフェルミオンが現われれば $s=N_s$ には右巻きのカイラルフェルミオンが必然的に現れてしまう．このような状況では左巻きモードだけにゲージ場を相互作用させるのは簡単ではない．実際，いろいろな方法が試みられたが今のところ成功したものはない．また，境界条件を変更しても，この問題を避けることはできない．例えば，周期境界条件の代わりにディリ

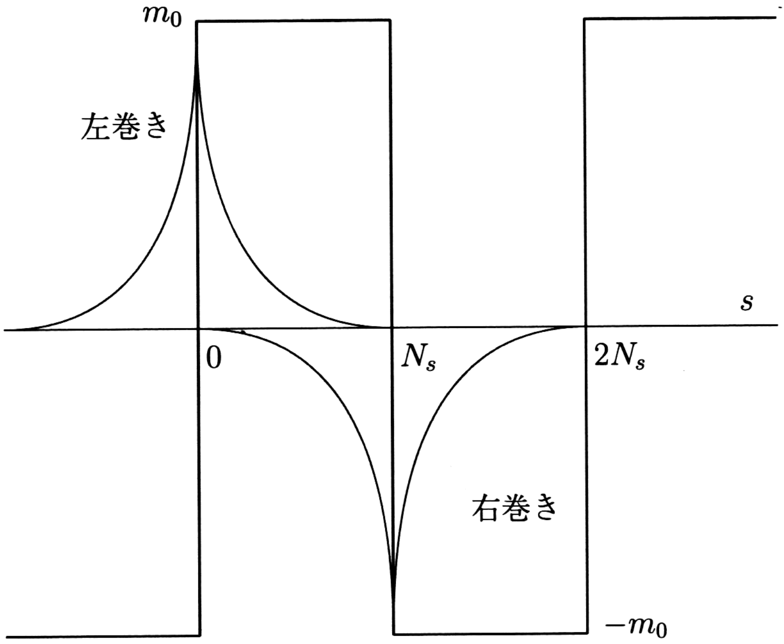


図 7.2：周期的境界条件（周期 $2N_s$）のときの質量項 $m_0\epsilon(s)$．$s=0$ 付近に左巻きモードが現われるとき，必然的に $s=N_s$ 付近に右巻きモードもあらわれる．

クレ型の境界条件を使っても，その境界に右巻きのカイラルフェルミオンが現れてしまう．

§7.2　ドメインウォール・フェルミオンとカイラル対称性

このように，ドメインウォール・フェルミオンは格子上でのカイラルゲージ理論の構成という当初の目的を達成することはできなかった．しかしながら，シャミア (Shamir)[53], およびフルマン (Furuman)・シャミア [54] によって，ドメインウォール・フェルミオンの新たな応用が提唱された．それは，この方

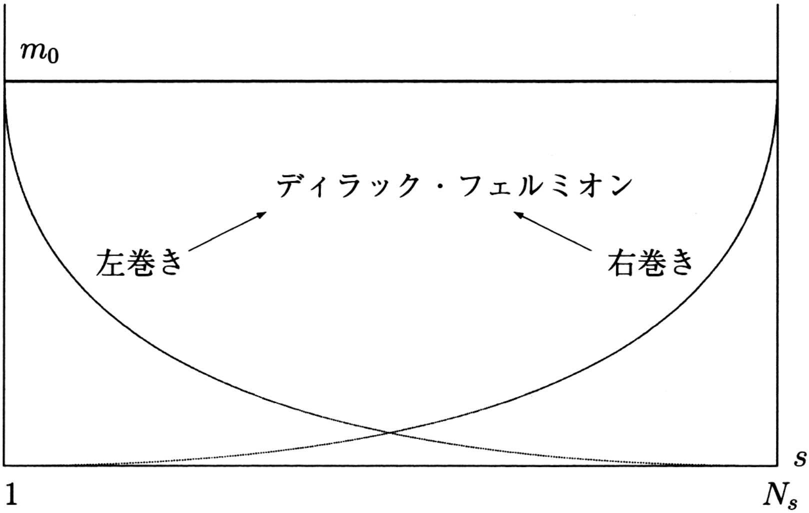


図 7.3：ディリクレ型境界条件のときの質量項 $m = m_0$．$s = 0$ 付近の左巻きモードと $s = N_s$ 付近の右巻きモードがあらわれ，4 成分のディラック・フェルミオンを構成する．

法を用いて QCD のようなベクター・ゲージ理論（ゲージ場が右巻きと左巻きのカイラルフェルミオンに同じように相互作用する理論）を格子上でカイラル対称性を保ったまま定式化することである．以下では，ドメインウォール・フェルミオンによる格子フェルミオンの構成について述べていく．

はじめに彼らが注目したことは，「カプランの定式化においてカイラルフェルミオンが存在するためには，$s > 0$ の領域と $s < 0$ の領域の両方が必要なわけではなく，どちらか一方があれば十分である」ということである．例えば，$0 < s < N_s$ を考えて，そこでの質量項 m は一定とする．この時，両端に，周期的境界条件ではなく，ディリクレ型の境界条件を課すと $s = 0$ 付近に左巻きのカイラルモード（2 成分）が，$s = N_s$ 付近に右巻きのカイラルモード（2 成分）が現れ，その 2 つを組み合わせることでカイラル対称性を持ったゼロ質量のディラック・フェルミオン（4 成分）が構成できる．(図 7.3 を見よ.)

この考えに基づいて具体的に格子フェルミオンを構成する．5 次元の質量を持ったウィルソン・フェルミオンを考え，それに 4 次元のゲージ場を相互

作用させる．この時，フェルミオン作用は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{F}}=&\frac{1}{2}\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}[\sum_{\mu}\gamma_\mu(U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s}-U^\dagger_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s})+\gamma_5(\psi_{n,s+1}-\psi_{n,s-1})]\\
&-M_0\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}\psi_{n,s}\\
&-\frac{1}{2}\sum_{n,s}\bar{\psi}_{n,s}[\sum_{\mu}(U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s}+U^\dagger_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s}-2\psi_{n,s})\\
&+(\psi_{n,s+1}+\psi_{n,s-1}-2\psi_{n,s})]. \qquad (7.2.1)
\end{aligned}
$$

ここで，第1項は5次元ディラック・フェルミオンの共変差分の項であるが，5次元方向のゲージ場がないので5次元方向はただの差分になっている．第2項は質量項であるが通常の場合とは符号が逆になっている．第3項は5次元のウィルソン項で，$r=1$ に対応している．ここで n は4次元座標で周期的境界条件を課し，$s=1,2,\cdots,N_s$ は5次元方向の座標でディリクレ型の境界条件

$$
\psi(x,s=0)=0, \quad \psi(x,s=N_s+1)=0
$$

を課す．

この理論は，5次元の理論であるといっても，5次元方向の力学変数はないので[2]，s を座標とは考えずに単なるフレーバー自由度と考えてもよい．この時，作用は次のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
S_{\mathrm{F}} &= \sum_{n,\mu,s}\frac{1}{2}\bar{\psi}_{n,s}\gamma_\mu(U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s}-U^\dagger_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s})\\
&+ \sum_{n,m,s,t}\bar{\psi}_{n,s}[MP_{\mathrm{L}}+M^\dagger P_{\mathrm{R}}]^{nm}_{st}\psi_{m,t} \qquad (7.2.2)
\end{aligned}
$$

ここで，$P_{\mathrm{R}}=(1+\gamma_5)/2$, $P_{\mathrm{L}}=(1-\gamma_5)/2$ は Right（右巻き），Left（左巻き）へのカイラル射影演算子であり，4成分のディラック・フェルミオンから右巻き成分，左巻き成分を取り出す働きがある．ここでは5次元目のガンマ行列 γ_5 が4次元のカイラル対称性を定義する γ_5 と同じであることをうまく使っている．また，M はフレーバー s を混ぜるような項を含んだ質量項で

[2] フェルミオンの成分の数は4次元でも5次元でも4である．

あり，次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
(M)^{n,m}_{s,t}\psi_{m,t} &= -\overbrace{\frac{1}{2}(U_{n,\mu}\psi_{n+\mu,s} + U^{\dagger}_{n-\mu,\mu}\psi_{n-\mu,s} - 2\psi_{n,s})}^{\nabla^2} \\
&- \psi_{n,s+1} + \psi_{n,s} - M_0\psi_{n,s} \qquad (7.2.3) \\
(M^{\dagger})^{n,m}_{s,t}\psi_{m,t} &= -(\nabla^2\psi)_{n,s} - \psi_{n,s-1} + \psi_{n,s} - M_0\psi_{n,s}. \qquad (7.2.4)
\end{aligned}
$$

6×6 の場合に具体的に書き下すと

$$
M = \begin{pmatrix}
\overbrace{1-\nabla^2-M_0}^{W(U)} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & W(U) & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & W(U) & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & W(U) & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W(U) & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W(U)
\end{pmatrix} \qquad (7.2.5)
$$

$$
M^{\dagger} = \begin{pmatrix}
W(U) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & W(U) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & W(U) & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1- & W(U) & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & W(U) & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & W(U)
\end{pmatrix} \qquad (7.2.6)
$$

となる．このように書き直された作用は「(無限個の) フレーバーを持ち，そのフレーバーに関して非対角かつエルミートでない質量項を持つ単純な（ダブラーを持っている）格子フェルミオン」を記述しているように見える．これから，この作用が如何にしてダブラーを持たないゼロ質量のカイラル・フェルミオンを記述しているのか見ていこう．

§7.3 自由場におけるゼロモードの存在

この作用が（4 次元の）ゼロ質量のフェルミオンを含んでいることを，自由場 ($g^2 = 0 \to U_{n,\mu} = 1$) の場合に見てみよう．この時，4 次元座標 x を運動量空間に変換すると，作用は次のように書ける．

$$S_{\mathrm{F}} = \sum_{s,t} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}_s(-p) \Big[i\hat{\not{p}} + \big(MP_{\mathrm{L}} + M^\dagger P_{\mathrm{R}} \big) \Big]_{st} \psi_t(p) \quad (7.3.1)$$

ここで $\hat{\not{p}} = \sum_\mu \gamma_\mu \hat{p}_\mu$, $\hat{p}_\mu = \sin p_\mu a$ であり，M は式 (7.2.5) の中で $W(U = 1) = 1 - M_0 + \sum_\mu (1 - \cos p_\mu a)$ と置き換えたもので与えられる．上の式を見ると,「この理論は多くのフレーバーを持つ 4 次元の自由フェルミオンと等価であり，その質量は M や $M^\dagger$ を対角化することによって得られる」，ということがわかる．したがって，もし M や $M^\dagger$ がゼロ固有値を持てば，つまり，

$$\sum_t M_{st}\ u_L(t,p) = 0, \qquad \sum_t M^\dagger_{st}\ u_R(t,p) = 0 \quad (7.3.2)$$

となるゼロモード解 u_L,u_R が存在すれば,

$$\psi_s(p) = \overbrace{P_{\mathrm{L}} u_L(s,p)}^{\text{左巻きゼロモード}} + \underbrace{P_{\mathrm{R}} u_R(s,p)}_{\text{右巻きゼロモード}} \quad (7.3.3)$$

と取ると，ψ はゼロ質量の（4 成分の）ディラック・フェルミオンを表すことになる．

そこで，ゼロモード解を求めてみることにする．$\sum_t M_{st}\phi_t = 0$ を具体的に書き下してみると

$$\sum_t M_{st}\phi_t = W\phi_s - \phi_{s+1} = 0$$

となり，この方程式の解は

$$\phi_s = W^{s-1}\phi_1$$

で与えられる．ここで，ディリクレ型の境界条件 $\psi_{N_s+1} = 0$ より,

$$\psi_{N_s+1} = W^{N_s}\psi_1 = 0 \to \psi_1 = 0$$

が導かれるので一般の N_s ではこのようなゼロモード解は存在しない．しかしながら，もし N_s が無限大でかつ $|W|<1$ であれば，漸近的に

$$\lim_{N_s\to\infty} W^{N_s}=0$$

となるので，ゼロでない解 ϕ_1 が存在する．ϕ_1 の大きさは規格化条件

$$1=\sum_{s=1}^{N_s}\phi_s^\dagger\phi_s=\phi_1^\dagger\phi_1\frac{1-W^{2N_s}}{1-W^2}\longrightarrow\phi_1^\dagger\phi_1\frac{1}{1-W^2}$$

より，ϕ_1 を正の実数に取れば，$\phi_1=\sqrt{1-W^2}\equiv c_0$ となる．結局，規格化されたゼロモード解は

$$\phi_s=c_0W^{s-1}$$

と求まる．

もう一方の方程式 $\sum_s M_{st}^\dagger\phi_s=0$ を考えると，

$$W\phi_s-\phi_{s-1}=0,\qquad \phi_0=0$$

を満たす解は，やはり $|W|<1$ かつ $N_s=\infty$ の場合のみ存在し，

$$\phi_s=c_0W^{N_s-s}$$

で与えられる．この解は $M\phi=0$ の解を $s\to N_s+1-s$ と変換することでも得られるが，これはこの変換によって，$M\phi=0$ が $M^\dagger\phi=0$ に変換されることを反映している．

ここで，ゼロモード解の存在に必要な条件 $|W(p)|<1$ を詳しく調べてみよう．この条件を具体的に書き下してみると，

$$0<M_0-\sum_\mu(1-\cos p_\mu a)<2$$

となる．ψ の伝搬関数が連続極限で極を持つためには前と同様に $\sin p_\mu a=O(a)$ が必要であり，このことから $p\simeq 0,\pi$ となるのは前と同様である．このとき，M_0 に対する条件を調べると表 7.1 の結果になる．

この表の見方を説明しよう．例えば，$p\simeq(0,0,0,0)$ のときに，$|W(p)|<1$ となってゼロモード解が存在するには，$0<M_0<2$ でなくてはならない．また，$p\simeq(\pi/a,0,0,0)$ の場合は $2<M_0<4$ が必要となる．表に挙げら

表 7.1：いろいろな運動量に対応する M_0 の条件

(p_μ)	M_0 の条件	対応する極の数
$(0,0,0,0)$	$0 < M_0 < 2$	1
$(\pi/a,0,0,0)$ など	$2 < M_0 < 4$	4
$(\pi/a,\pi/a,0,0)$ など	$4 < M_0 < 6$	6
$(\pi/a,\pi/a,\pi/a,\pi/a)$ など	$6 < M_0 < 8$	4
$(\pi/a,\pi/a,\pi/a,\pi/a)$	$8 < M_0 < 10$	1

れた条件はすべて異なるので，$p \simeq (0,0,0,0)$ のときにゼロモード解を持つなら，ダブラーに対応する他の運動量で解を持つことはない．したがって，$0 < M_0 < 2$ と選んでおけば，$p \simeq (0,0,0,0)$ である物理的なフェルミオンだけがゼロモード解を持ち，その結果，ダブリング問題のない物理的なゼロ質量ディラック・フェルミオンが構成される．また，許される運動量の範囲も M_0 によって決まっており，物理的フェルミオンの場合，$M_0 = 1$ の場合に許される運動量の範囲が最大になり，

$$-1 < \sum_\mu (1 - \cos p_\mu) < 1 \tag{7.3.4}$$

という条件で与えられる．

以上のことは，ドメインウォール・フェルミオンの自由場はダブリング問題のないゼロ質量のフェルミオンを記述していることを示している．ただし，この段階では，焦点であるカイラル対称性がどうなっているのかはまだはっきりしていない．通常はカイラル対称性からゼロ質量のフェルミオンを導くのだが，ここでは逆にゼロ質量のフェルミオンが存在することから実効的に「カイラル対称性」が実現されている，と期待するのである．この問題は，後で詳しく議論する．

§7.4 クォーク場と QCD

前節で得られたゼロモード解は

$$
\begin{aligned}
u_{\rm L}(p,s) &= c_0(p)W(p)^{s-1} \\
u_{\rm R}(p,s) &= c_0(p)W(p)^{N_s-s}
\end{aligned}
$$

となるが，この式から明らかなように左巻き (Left-handed) ゼロモードは $s=1$ 付近に，右巻き (Right-handed) ゼロモードは $s=N_s$ 付近にそれぞれ局在している.（図 7.3 も参照.）この2つのゼロモードを組み合わせればゼロ質量のディラック・フェルミオンが構成でき，それが QCD におけるクォークになるはずである．しかし，ここで問題となるのは，クォークを表わす場をどうやって定義するかということである．自由場の場合はゼロ・モードを具体的に求めることができたが，相互作用がはいった場合はそれも不可能である．また，自由場の場合は，解けるといっても運動量空間のものなので実空間では複雑なものになる．ここでは，ゼロ・モード解をそのままクォーク場にするのではなく，左巻きゼロ・モードが $s=1$ で，右巻きゼロ・モードが $s=N_s$ で，それぞれ極大値を持つことを使って，クォーク場としてもともとのドメインウォール・フェルミオン ψ の $s=1$ での左巻き成分と $s=N_s$ での右巻き成分をとることにする．具体的には

$$
\begin{aligned}
q_n &= P_{\rm L}\psi_{n,1} + P_{\rm R}\psi_{n,N_s} \\
\bar{q}_n &= \bar{\psi}_{n,1}P_{\rm R} + \bar{\psi}_{n,N_s}P_{\rm L}
\end{aligned}
\tag{7.4.1}
$$

とクォーク場を与える．ゼロモード解は，左巻きが $s=1$ に右巻きが $s=N_s$ にほとんど局在しているので，クォーク場 q とゼロモード解との重なりは大きいことが期待できる.

ゼロモード解が記述するフェルミオンはゼロ質量であるが，次の形で与えられるクォーク場の質量項によって質量 m_f を持つことができる.

$$
m_f\bar{q}_n q_n = m_f\left[\bar{\psi}_{n,1}P_{\rm R}\psi_{n,N_s} + \bar{\psi}_{n,N_s}P_{\rm L}\psi_{n,1}\right] \tag{7.4.2}
$$

この項によって，ドメインウォール・フェルミオンの質量行列 M は（6×6 の場合）次の形に変更される.

$$
M = \begin{pmatrix}
W & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & W & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & W & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & W & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & W & -1 \\
m_f & 0 & 0 & 0 & 0 & W
\end{pmatrix}
$$

おもしろいことに質量項は $s = 1$ と $s = N_s$ を結び付ける境界条件になっており，$m_f = 0$ がディリクレ型境界条件，$m_f = 1$ は反周期的境界条件，$m_f = -1$ は周期的境界条件に相当している．

質量項に現れるこの m_f がクォーク場の実際の質量とどのような対応関係にあるかを見てみよう．

$$
\begin{aligned}
P_{\rm L}\psi_{n,1} &= P_{\rm L}q_n, \qquad P_{\rm R}\psi_{n,N_s} = P_{\rm R}q_n \\
\bar{\psi}_{n,1}P_{\rm R} &= \bar{q}_n P_{\rm R}, \qquad \bar{\psi}_{n,N_s}P_{\rm L} = \bar{q}_n P_{\rm L}
\end{aligned}
$$

であるから，$\psi_{n,s}$ をゼロモード解のみで近似すると

$$
\begin{aligned}
\psi_{n,s} &\simeq W^{s-1}P_{\rm L}q_n + W^{N_s-s}P_{\rm R}q_n \\
\bar{\psi}_{n,s} &\simeq \bar{q}_n W^{s-1}P_{\rm R} + \bar{q}_n W^{N_s-s}P_{\rm L}
\end{aligned}
$$

となる．運動量空間では

$$
\begin{aligned}
\psi_s(p) &\simeq \left[W^{s-1}P_{\rm L} + W^{N_s-s}P_{\rm R}\right] q(p) \\
\bar{\psi}_s(-p) &\simeq \bar{q}(-p)\left[W^{s-1}P_{\rm R} + W^{N_s-s}P_{\rm L}\right]
\end{aligned}
$$

となるから，これを作用に代入すると

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{s,t}\bar{\psi}_s(-p)\left[i\hat{\not{p}} + MP_{\rm L} + M^\dagger P_{\rm R}\right]_{st}\psi_t(p) \\
&= q(-p)i\hat{\not{p}}\sum_s(W^{2s-2}P_{\rm L} + W^{2N_s-2s}P_{\rm R})q(p) \\
&\quad + q(-p)\sum_{st}\left[W^{N_s-s}M_{st}W^{t-1}P_{\rm L} + W^{s-1}M^\dagger_{st}W^{N_s-t}P_{\rm R}\right]q(p) \qquad (7.4.3)
\end{aligned}
$$

と書ける．(ここで p に関する積分記号は省略していることに注意.)

各項は次のように計算される．

$$\sum_{s=1}^{N_s} W^{2s-2}=\sum_{s=1}^{N_s} W^{2N_s-2s}=\frac{1-W^{2N_s}}{1-W^2}\to\frac{1}{1-W^2}$$

$$\sum_{s,t} W^{N_s-s}M_{s,t}W^{t-1}=\sum_{s} W^{N_s-s}[W\cdot W^{s-1}-W^s(1-\delta_{s,N_s})+m_f\delta_{s,N_s}]$$

$$=m_f+W^{N_s}$$

$$\sum_{s,t} W^{s-1}M_{s,t}W^{N_s-t}=\sum_{s} W^{s-1}[W\cdot W^{N_s-s}-W^{N_s-s+1}(1-\delta_{s,1})+m_f\delta_{s,1}]$$

$$=m_f+W^{N_s}.$$

これらを用いると，

$$S \quad \simeq \quad \bar{q}(-p)\left[\frac{1-W^{2N_s}}{1-W^2}i\hat{\not p}+(m_f+W^{N_s})\right]q(p) \qquad \textbf{(7.4.4)}$$

となるので，クォーク場の質量は $W_0 = W(p=0) = 1 - M_0$ を用いて

$$m_{\text{quark}}=\frac{1-W_0^2}{1-W_0^{2N_s}}[m_f+W_0^{N_s}]\to(1-W_0^2)m_f, \qquad N_s\to\infty$$

と与えられる．$N_s\to\infty$ の極限を取る前の表式を見ると，m_f 以外にも，質量に対する寄与 W^{N_s} が存在することが見て取れる．これは「$N_s\neq\infty$ ではゼロ固有値解がない」という前の結果に対応している．

$s=1$ にある左巻きゼロモードと $s=N_s$ にある右巻きゼロモードの重なりの度合いが質量になるということから，$W_0^{N_s}$ の項の存在を直感的に理解できる．なぜなら，W^{s-1} あるいは W^{N_s-s} で減衰していく2つの解は $s=N_s/2$ あたりで最大の重なり $(W^{N_s/2})^2=W^{N_s}$ を持つからである．$N_f=\infty$ の極限ではこの余分な項は落ちて，$m_{\text{quark}}=(1-W_0^2)m_f$ となり，クォーク質量は m_f に比例することが見て取れる．この性質もやはり通常はカイラル対称性から保証されるので，なんらかの意味で「カイラル対称性」が存在していることを強く示唆している．

ドメインウォール・フェルミオンを用いた格子QCDのことをドメインウォール QCD (DWQCD) と呼ぶ．

§7.5　ドメインウォール・フェルミオンの自由伝搬関数

前章までは，ゼロ・モード解に焦点を当てて解析してきたが，ここでは相

互作用がない場合のドメインウォール・フェルミオンの伝搬関数を考察してゼロ質量の4次元フェルミオンを記述していることを見ていこう．

伝搬関数の計算の詳細は付録Gに譲るが，その結果は以下のように書ける．

$$S_F(p)_{st} \ = \ \left[\left(-i\not{s}(p) + W_m^-\right) G_{\rm L} P_{\rm L} + \left(-i\not{s}(p) + W_m^+\right) G_{\rm R} P_{\rm R}\right]_{st} \quad (7.5.1)$$

ここで，

$$G_{\rm L}(s,t) = G(s-t) + A_{++}e^{\alpha(s+t)} + A_{+-}e^{\alpha(s-t)} + A_{-+}e^{\alpha(-s+t)} + A_{--}e^{\alpha(-s-t)} \quad (7.5.2)$$

$$G_{\rm R}(s,t) = G(s-t) + B_{++}e^{\alpha(s+t)} + B_{+-}e^{\alpha(s-t)} + B_{-+}e^{\alpha(-s+t)} + B_{--}e^{\alpha(-s-t)} \quad (7.5.3)$$

$$G(s-t) = A(e^{\alpha(N_s-|s-t|)} + e^{-\alpha(N_s-|s-t|)}) \quad (7.5.4)$$

であり，係数 A, $A_{\pm\pm}$, $B_{\pm\pm}$ は付録Gに与えられている．

このフェルミオンの伝搬関数の $p \to 0$ での振る舞いを見てみよう．ただし，ここでは $m_f = 0$ としておく．付録Gに与えたように，N_s が充分大きい時に各係数は

$$\begin{aligned}
A_{++} &= \frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\
A_{-+} &= -\frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\
A_{+-} &= -\frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\
A_{--} &= -\frac{1}{M_0(2-M_0)} \\
B_{++} &= -\frac{1}{M_0(2-M_0)}e^{-2\alpha(N_s+1)} \\
B_{-+} &= -\frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\
B_{+-} &= -\frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\
B_{--} &= \frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{2\alpha}
\end{aligned} \quad (7.5.5)$$

と振舞う．したがって，

$$G_{\rm L}(s,t) \simeq \frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-\alpha(2N_s-s-t)}+\cdots \tag{7.5.6}$$

$$G_{\rm R}(s,t) \simeq \frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-(s+t-2)}+\cdots \tag{7.5.7}$$

となる．伝搬関数の振る舞いから，左巻きゼロモードは $s \simeq t \simeq 1$, 右巻きゼロモードは $s \simeq t \simeq N_s$, の境界に現われていることが読み取れる[3]．このことは，ゼロモードの考察で予想された性質を伝搬関数のレベルで具体化していることを示している．

§7.6　ウォード・高橋恒等式

これまでに，自由場の場合のドメインウォール・フェルミオンは，M_0 に関する適当な条件を満たせば，ゼロ質量のディラック・フェルミオンを記述することがわかったが，これはあくまで相互作用のない自由場での性質であり，ゲージ場との相互作用を入れてもゼロ質量のディラック・フェルミオンが存在するかどうかはわからない．

実際，カイラル対称性を壊してしまうウィルソン・フェルミオンの場合でも相互作用がなければ $M_0=0$ でゼロ質量のディラック・フェルミオンを記述できるが，相互作用を入れてしまうとその性質を保つことはできず，M_0 の微調整が必要になる．これはゼロ質量を保証するカイラル対称性がないことから当然の結果である．そこで，ここでは，ドメインウォール・フェルミオンに相互作用を入れたらゼロ質量のディラック・フェルミオンがどうなるかを議論していきたいと思う．

その目的のためにウォード・高橋恒等式が必要になるので，はじめにそれを議論する．5章でも述べたが，連続理論において QCD の作用がカイラル変換で不変であることから導かれる（軸性）ウォード・高橋恒等式 (Axial-vector Ward-Takahashi identity) は

$$\langle 0|\left\{\partial_\mu A_\mu(x)+2mP^a(x)\right\}\mathcal{O}(y)|0\rangle+\langle 0|\delta_x^a\mathcal{O}(y)|0\rangle=0$$

[3] 伝搬関数では，G_L が右巻き，G_R が左巻きに対応しており，記号の意味とは逆になっていることに注意．

となる．ここで $|0\rangle$ は真空状態，m はクォーク質量，$A^a_\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\tau^a\psi(x)$ は軸性ヴェクトル・カレントであり，$P^a(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\tau^a\psi(x)$ は擬スカラー密度である．また，$\psi(x)$ は N_f 種類（QCD ではフレーバーと呼ぶ）のディラック・フェルミオンを列ベクトルとして並べたもので，τ^a はその列ベクトルに作用する $N_f \times N_f$ の行列でフレーバー行列と呼ばれており，τ^0 は単位行列に比例し，残りの $\tau^a(a=1,\cdots,N_f^2-1)$ は $\mathrm{tr}\ \tau^a = 0$ を満たす対称行列で $SU(N_f)$ 変換の生成子を構成する．

δ^a_x は無限小局所カイラル変換であり，

$$
\begin{aligned}
\delta^a_x\psi(y) &= i\delta(x-y)\tau^a\gamma_5\psi(x) \\
\delta^a_x\bar{\psi}(y) &= i\delta(x-y)\bar{\psi}(x)\tau^a\gamma_5
\end{aligned}
\tag{7.6.1}
$$

と定義され，$\mathcal{O}(y)$ はフェルミオンやゲージ場を含む任意の局所演算子である．5 章でも見てきたように，この（軸性）ウォード・高橋恒等式を使って以下のような QCD の力学的な性質を導くことができる．まず，$\mathcal{O}(y) = P^a(y)$，$x \neq y$ とすると，上の式は

$$\langle \partial_\mu A^a_\mu(x) P^a(x)\rangle = -2m\langle P^a(x)P^a(y)\rangle$$

となる．ここで，P が生成する中間状態として一番軽い質量を持つパイ中間子の状態のみを考えると

$$-im_\pi\langle 0|A_0(0)|\vec{0},\pi\rangle = 2m\langle 0|P^a(0)|\vec{0},\pi\rangle$$

となる．ここで $|\vec{p},\pi\rangle$ は空間運動量 $\vec{p}$ を持つパイ中間子の 1 粒子状態，m_π はパイ中間子の質量である．ここではゼロ運動量の状態を考えている．パイ中間子の崩壊定数 f_π を $\langle 0\ |A_\mu(0)|\vec{p},\pi\rangle = ip_\mu f_\pi$ で定義すると，

$$m_\pi^2 f_\pi = 2m\langle 0|P^a(0)|\vec{0},\pi\rangle \tag{7.6.2}$$

となるので，$m \to 0$ の極限で $f_\pi \neq 0$ であれば，

$$\lim_{m\to 0} m_\pi^2 = \lim_{m\to 0} 2m\frac{\langle 0|P^a(0)|\vec{0},\pi\rangle}{f_\pi} = 0$$

となる．これはパイ中間子がカイラル対称性の自発的破れに伴うゼロ質量の南部・ゴールドストン粒子であることを表しているが，式 (7.6.2) は，カイラル

対称性がクォーク質量 m によって壊されているとき，ゼロであったパイ中間子の質量がどう変化するかを予言するもので，PCAC (Partially Conserved Axialvector Current) 関係式と呼ばれ，ウォード・高橋恒等式の重要な帰結の1つである．

以上のことから,「クォーク質量がゼロの極限で作用がカイラル対称性を持っていること」と「ウォード・高橋恒等式が成り立つこと」がほとんど同等であることがわかる．ドメインウォール・フェルミオンの作用はクォーク場以外の（重い）モードも含んでいるので作用のカイラル対称性を調べることは難しい．そこで，そのかわりにドメインウォール・クォークが満たすウォード・高橋恒等式を調べることにする [54].

まず，ドメインウォール・フェルミオンに対する次のような変換を考える．

$$\begin{aligned}\psi_{n,s} \to \psi'_{n,s} &= \mathrm{e}^{i\theta^a_s \tau^a}\psi_{n,s} \\ \bar{\psi}_{n,s} \to \bar{\psi}'_{n,s} &= \bar{\psi}_{n,s}\mathrm{e}^{-i\theta^a_s\tau^a}\end{aligned} \tag{7.6.3}$$

ここで，

$$\theta^a_s = \begin{cases} -\theta^a & \text{for} \quad s = 1, 2, \cdots, N_s/2 \\ \theta^a & \text{for} \quad s = N_s/2+1, \cdots, N_s - 1, N_s \end{cases} \tag{7.6.4}$$

である．この変換は s が一定の4次元上ではベクトル変換であるが，$s = N_s/2$ と $s = N_s/2+1$ を境にベクトル変換の符号が逆になっている．したがって，左巻き成分が $s = 1$ に，右巻き成分が $s = N_s$ にあるドメインウォール・クォーク場 q に対してはちょうど通常のカイラル変換のように働く．実際，

$$\begin{aligned}q_n \to q'_n &= (\mathrm{e}^{-i\theta^a\tau^a}P_{\mathrm{L}} + \mathrm{e}^{i\theta^a\tau^a}P_{\mathrm{R}})q_n = \mathrm{e}^{i\theta^a\tau^a\gamma_5}q_n \\ \bar{q}_n \to \bar{q}'_n &= \bar{q}_n(\mathrm{e}^{-i\theta^a\tau^a}P_{\mathrm{L}} + \mathrm{e}^{i\theta^a\tau^a}P_{\mathrm{R}}) = \bar{q}_n\mathrm{e}^{i\theta^a\tau^a\gamma_5}\end{aligned}$$

となり，カイラル変換になっていることがわかる．

さて，ドメインウォール作用に対してこの変換を施した時に導かれるウォード・高橋恒等式を書き下そう．計算の詳細は付録 H に譲るが結果は以下の通りである．

$$\langle\{\nabla^-_\mu A^a_\mu(n) + 2m_f P^a(n)\}\mathcal{O} + \delta^a_n\mathcal{O}\rangle = \langle 2j^a_5(n)\mathcal{O}\rangle \tag{7.6.5}$$

ここで，$P(n)$ は擬スカラー密度であり，

$$P^a(n) = \bar{q}_n \gamma_5 \tau^a q_n$$

とクォーク場のみで与えられるが，擬ベクトル電流 $A^a_\mu(n)$ は

$$\begin{aligned} A^a_\mu(n) &= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{N_s} \epsilon(s-(N_s+1)/2)[\bar{\psi}_{n+\mu,s}(1+\gamma_\mu)U^\dagger_{n,\mu}\tau^a\psi_{n,s} \\ &- \bar{\psi}_{n,s}(1-\gamma_\mu)U_{n,\mu}\tau^a\psi_{n+\mu,s} \end{aligned} \quad (7.6.6)$$

と，s に関する和を含んでおり，クォーク場 q_n,$\bar{q}_n$ のみで書くことはできない．これはすべての $\psi_{n,s}$ が変換されることから当然ではある．ここで符号関数は $\epsilon(s) = s/|s|$ で与えられ，∇^-_μ は後方差分であり，$\nabla^-_\mu f(n) = f(n) - f(n-\mu)$ と定義される．

この A^a_μ の複雑さを除けば，上式の左辺の形は通常の格子上の軸性ウォード・高橋恒等式と同じである．したがって，右辺の項はウォード・高橋恒等式の破れを与えるもので，具体的には

$$j^a_5(n) = \frac{1}{2}[\bar{\psi}_{n,N_s/2+1}(1+\gamma_5)\tau^a\psi_{n,N_s/2} - \bar{\psi}_{n,N_s/2}(1-\gamma_5)\tau^a\psi_{n,N_s/2+1}]$$

となる．この項は異常項と呼ばれ，ちょうどベクトル変換の符号が変わる s 空間の真ん中にある場 $\psi_{n,N_s/2}$ や $\psi_{n,N_s/2+1}$ のみに依存している．

異常項のこの形から次の性質を満たすことがわかる．もし，任意の演算子 $\mathcal{O}$ がフェルミオンとしてはクォーク場 q,$\bar{q}$ しか含まないとすると（もちろんゲージ場は含んでもよい），$N_s \to \infty$ の極限で

$$\begin{aligned} \langle 2j^a_5(n)\ \mathcal{O}\rangle &= 0 \qquad \text{for } a \neq 0 \text{ (non-singlet)} \\ &\neq 0 \qquad \text{for } a = 0 \text{ (singlet)} \end{aligned}$$

となる．この性質は次のように理解できる．$a \neq 0$ の場合，tr $\tau^a = 0$ であるので j^a_5 のフェルミオンは自分自身でループを作ることはできない．したがって，j^a_5 の中の $\psi_{n,N_s/2}$ や $\psi_{n,N_s/2+1}$ は $\mathcal{O}$ の中の $\bar{q}$ と伝搬関数でつなげなければならないし，$\bar{\psi}_{n,N_s/2}$ や $\bar{\psi}_{n,N_s/2+1}$ は q とつなげなければならない．q,$\bar{q}$ は $s = 1, N_s$ の場しか含んでいないので 5 次元方向に $N_s/2$ ぐらい伝搬しなくてはいけない．(図 7.4 を参照.)

前に見たように一番軽いゼロモードは 5 次元方向に指数関数的に減衰するので，$N_s \to \infty$ でその寄与はゼロになると考えられる．このことは自由場

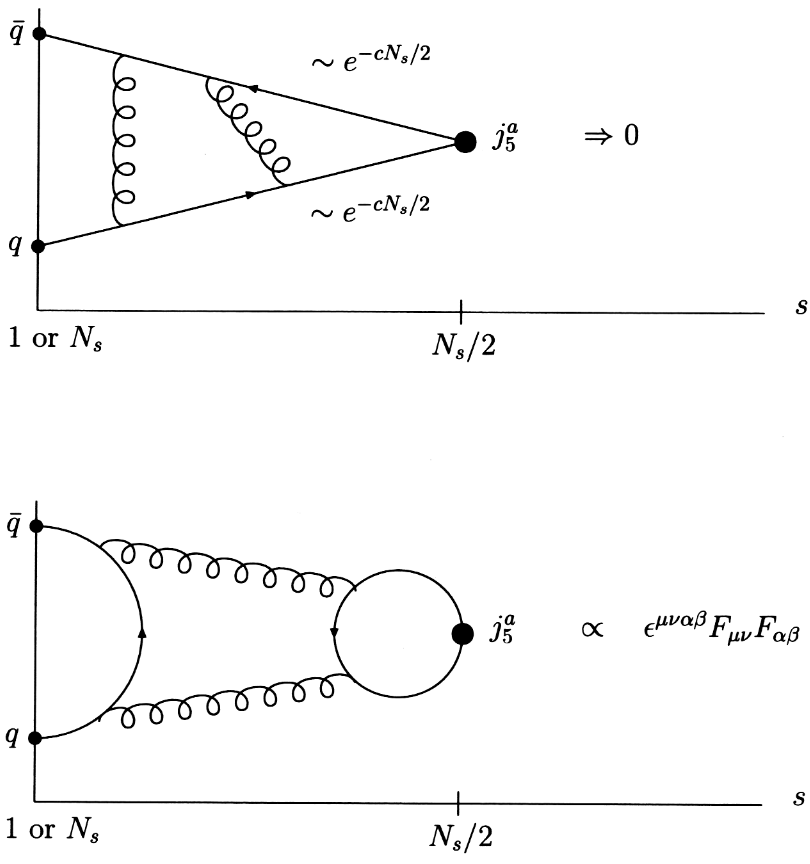


図 7.4： 軸性ウォード・高橋恒等式の破れ $\langle j_5^a \mathcal{O} \rangle$ に寄与する典型的なファイマン図の例．上：すべてのフレーバーに共通で，この図の寄与は $N_s \to \infty$ でゼロになる．下：フレーバー 1 重項 ($a = 0$) だけに寄与するファイマン図の例．$N_s \to \infty$ でカイラル・アノマリーを与える．

の場合やゲージ場の結合定数が小さい場合は容易に示すことができる．一方，$a=0$ の時は $\mathrm{tr}\,\tau^a=\mathrm{tr}\,1\neq 0$ なので上の議論は適用されない．やはり，ゲージ場の結合定数が小さい場合の計算では

$$\langle 2j_5^0(n)\ \mathcal{O}\rangle = \frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}\mathcal{O}$$

となり，アノマリーを与える．

まとめると，ドメインウォール・フェルミオンの満たすウォード・高橋恒等式は $N_s\to\infty$ の極限で，フレーバー多重項 $(a\neq 1)$ の場合は通常のカイラル変換に対するウォード・高橋恒等式に一致し，フレーバー一重項の場合はアノマリーを含んだウォード・高橋恒等式になるので，QCD で期待される性質を再現している．ただし，擬ベクトル・カレント A_μ^a 以外はクォーク場のみしか含まないという制限が必要である．この結果は，相互作用のある場合でもドメインウォール・クォーク場は「カイラル対称性」を持っていることを強く示唆している．

§7.7 重いモードの取り扱い：パウリ・ビラース法

ドメインウォール・フェルミオンは自由場の場合に 1 つの軽いディラック・フェルミオンを含んでいることがわかった．また，相互作用を入れた場合でも，軽いモードの存在はウォード・高橋恒等式によって保証されているように見える．「軽いモード＝カイラルフェルミオン」の存在がなぜ保証されるかの本質的な理解は次章以降の考察に譲るが，ここではドメインウォール・フェルミオンに現れる重いモードの取り扱いを簡単に触れる．

ドメインウォール・フェルミオンは 4 次元的に見ると N_s 個のフェルミオンの理論なので 1 つの軽いモード以外に N_s-1 個の（質量が格子カットオフ $1/a$ 程度の）重いフェルミオンが存在するはずである[4]．格子カットオフより遥かに小さい低エネルギーでは重いモードの影響はほとんどないと思えるが，N_s が大きくなると量子効果であるフェルミオン・ループの寄与を通して影響を与える可能性がある．実際，このフェルミオンの分配関数を計算すると

$$Z=\det D_F\propto(\text{定数})^{N_s}$$

[4] やはり格子カットオフ程度の質量を持つダブラーを含めると全部で $16N_s-1$ 個になる．

となるので，自由エネルギー $F \equiv \log Z = O(N_s)$ は $N_s \to \infty$ で発散してしまう．この発散を取り除き，有限の理論を定義するために，以下のようなパウリ・ビラース差引法 (Pauli-Villars subtraction) を行う必要がある．

質量が m_f であるドメインウォール・フェルミオンの作用を

$$S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{DWF}} = \bar{\psi} D_{\mathrm{F}}(m_f)\psi$$

と書いたとする．ここで ψ はフェルミオンである．ここで，ボソンであるパウリ・ビラース場 ϕ に対する作用を

$$S_{\mathrm{F}}^{\mathrm{PV}} = \bar{\phi} D_{\mathrm{F}}(m_f = 1)\phi$$

で与える．$m_f = 1$ なので反周期的境界条件になっていることに注意されたい．

この2つの作用の「和」で理論を定義したとすると，分配関数は

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\psi\, \mathcal{D}\bar{\psi}\, \mathcal{D}\phi\, \mathcal{D}\bar{\phi}\, \exp\left[\bar{\psi} D_{\mathrm{F}}(m_f)\psi + \bar{\phi} D_{\mathrm{F}}(m_f = 1)\phi\right] \\ &= \frac{\det D_{\mathrm{F}}(m_f)}{\det D_{\mathrm{F}}(m_f = 1)} \end{aligned} \tag{7.7.1}$$

となる．この式を見れば，m_f によって影響を受ける軽いモード以外の寄与は分子と分母とで相殺しているのが見て取れる．また，分母に現れる $m_f = 1$ であるモードの質量はやはり格子カットオフ程度なので分子の軽いモードの寄与を打ち消すことはない．したがって，パウリ・ビラース場の導入によって $N_f = \infty$ の発散は取り除かれ，ほとんど軽いモードの寄与のみが取り出されたことになる．唯一残った分母の $m_f = 1$ のモードの影響については次章以降で検討することにする．

第 8 章
ギンスパーグ・ウィルソン関係式とカイラル対称性

前章で見てきたように，ドメインウォール・フェルミオンは $N_s \to \infty$ の極限でゼロ質量の粒子を記述し，また，軸性ウォード・高橋恒等式を満たし，カイラル対称性を保った格子フェルミオンの定式化として有望なものである．しかしながら，ドメインウォール・フェルミオンはカイラル対称性から予想される性質を満たしているというだけで，そのカイラル対称性は間接的なものである．そこで，ドメインウォール・フェルミオンの満たす“カイラル”対称性は何か，を直接的に考察していきたいが，はじめに少し話を一般的にして，格子フェルミオンに残された対称性はどのようなものか，という観点で考察を進めていくことにする．

§8.1　ギンスパーグ・ウィルソン関係式

フェルミオンの場の双１次形式から作られる次のような一般的な作用を考える．

$$S_F \quad = \quad \bar{\psi} D \psi \tag{8.1.1}$$

この作用がカイラル対称性を持つとすると，

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D \quad = \quad 0 \tag{8.1.2}$$

となる．つまり，一般的なディラック演算子が γ_5 と反可換であれば作用はカイラル対称性をもつ．

さて，この関係式は格子上ではどうなるであろうか？ ニールセン・二宮の

定理からダブリング問題のない格子作用は上の関係式を満たせないはずである．したがって，格子上では

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = O(a) \tag{8.1.3}$$

となるであろう．さて，右辺に現れた $O(a)$ のカイラル対称性の破れが「最小」になるとき，D の満たす関係式はどのようなものであろうか？

この問いに答えるために，ギンスパーグ (Ginsparg) とウィルソン (Wilson) はカイラル対称性を持つフェルミオン作用にカイラル不変でない繰り込み群 (renormalization group) の変換を施し，得られたフェルミオン作用の満たすべき条件を考察した [56]．繰り込み群の変換によって運動量の上限が小さくなっていくので，繰り込み群の変換と格子正則化とをほぼ同一視できるであろう，というのが彼らの考えである．ここで，繰り込み変換はスケールは変えるが記述する物理は変えないことを思い出して欲しい．彼らはフェルミオンに関しての繰り込み変換を実際に遂行することで，以下の関係式を得た．

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D \quad = \quad aDR\gamma_5 D \tag{8.1.4}$$

この関係式をギンスパーグ・ウィルソン関係式 (Ginsparg-Wilson relation) と呼ぶ．ここで R は γ_5 と可換な局所演算子であり，繰り込み変換から決定されるものであるが，以下の議論ではその具体形は重要ではない．この式の左右から D^{-1} をかけると

$$\gamma_5 D^{-1} + D^{-1}\gamma_5 \quad = \quad Ra\gamma_5 \tag{8.1.5}$$

となり，伝搬関数 D^{-1} に対するカイラル対称性の破れは $O(a)$ かつ，局所的であることがわかる．つまり，カイラル対称性の破れは長距離の物理に寄与せず，連続極限で消えてしまう．

この関係式は非線型であるため，局所性 (locality) を満たす具体的な解はなかなか見つからなかった．ところが，最近，ギンスパーグ・ウィルソン関係式（GW 関係式）を満たす D が実際に構成された．その紹介をする前に，GW 関係式を満たす D はどのような性質を持つかを考察しておこう．

§8.2 GW 関係式と “カイラル” 対称性

式 (8.1.5) は「伝搬関数に対するカイラル対称性の破れは $O(a)$（連続極限で消える）でかつ局所的（低エネルギーでの寄与を出さない）である」ということを意味しており，カイラル対称性が “ほとんど” 成り立っていると言うことができる．

この “ほとんど” カイラル対称性というのを正確に表したのが以下の（無限小）変換である．

$$\delta\psi = \gamma_5\left(1 - a\frac{R}{2}D\right)\psi, \qquad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}\left(1 - aD\frac{R}{2}\right)\gamma_5. \tag{8.2.1}$$

これは $O(a)$ を除いて確かにカイラル変換になっている．この変換を作用に施すと

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta\bar{\psi}D\psi + \bar{\psi}D\delta\psi = \bar{\psi}\left(1 - aD\frac{R}{2}\right)\gamma_5 D\psi + \bar{\psi}D\gamma_5\left(1 - a\frac{R}{2}D\right)\psi \\ &= \bar{\psi}[\gamma_5 D + D\gamma_5 - aDR\gamma_5 D]\psi = 0 \end{aligned} \tag{8.2.2}$$

となり，作用の持つ対称性であることがわかる [60]．式の最後でゼロになることを示すのに GW 関係式を用いている．

ここで変換 (8.2.1) は一意的でないことに注意して欲しい．作用 S は次のようなパラメータ Z を含んだ変換でも不変になることは容易に示せる．

$$\delta\psi = \gamma_5(1 - aRZD)\psi, \qquad \delta\bar{\psi} = \bar{\psi}(1 - aDR(1 - Z))\gamma_5. \tag{8.2.3}$$

ここで，$Z = 1/2$ としたのが，変換 (8.2.1) であり，$Z = 1$ なら ψ 変換だけが D を含み，$\bar{\psi}$ の変換は D を含まず，通常のカイラル変換になる．

この対称性から導かれるウォード・高橋の恒等式を使うと，パイ中間子が南部・ゴールドストン粒子のように振る舞うことが示せる [59]．つまり，フェルミオン質量がゼロの極限で $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$ なら，パイ中間子など擬スカラー中間子 (pseudo-scalar meson) の質量はゼロになるのである．

このように GW 関係式を満たす格子フェルミオンは連続理論でのカイラル対称性とほぼ同じような性質を持つ対称性 (8.2.1) を持っていることがわかり，これが格子フェルミオン問題に対する 1 つの解答になっている．

この対称性はカイラル対称性とは異なるので前章のニールセン・二宮の定

理とは抵触しない．では，アノマリーはどうなっているのだろうか？ それを考えるために，変換 (8.2.1) をフェルミオンの数が N_f 個の場合に拡張する．

$$\delta^a\psi = T^a\gamma_5(1 - a\frac{R}{2}D)\psi, \qquad \delta^a\bar{\psi} = \bar{\psi}(1 - aD\frac{R}{2})\gamma_5 T^a. \tag{8.2.4}$$

ここで T^a $(a = 0, 1, \cdots, N_f^2 - 1)$ は $U(N_f)$ の生成子で T^0 は単位行列に比例し，それ以外はトレースレス (traceless) のエルミート (Hermete) 行列である．$O(a)$ を無視すれば，この変換は（無限小）カイラル $U(N_f)$ 変換になっている．

この変換を使ってウォード・高橋の恒等式を導く，と前に述べたが，実は注意が必要である．変換に D を含んでいるため，フェルミオンの経路積分 (path integral) の測度 (measure) がこの変換で不変にならず，ヤコビアン (Jacobian) がでてしまう．それを実際に計算するためにつぎのような無限小変換 (パラメタ ϵ^a) を考える．

$$\psi \quad \to \psi' = \psi + \epsilon^a\delta^a\psi \tag{8.2.5}$$

$$\bar{\psi} \quad \to \bar{\psi}' = \bar{\psi} + \epsilon^a\delta^a\bar{\psi} \tag{8.2.6}$$

この時ヤコビアンは以下のように計算される．

$$\begin{aligned}
& \det[1 + \epsilon^a T^a\gamma_5(1 - a\frac{R}{2}D)] \times \det[1 + \epsilon^a(1 - aD\frac{R}{2})T^a\gamma_5] \\
= \quad & \exp\left\{\mathrm{tr}\ \log[1 + \epsilon T^a\gamma_5(1 - a\frac{R}{2}D)] + \mathrm{tr}\ \log[1 + \epsilon(1 - aD\frac{R}{2})T^a\gamma_5]\right\} \\
= \quad & \exp\left\{2\mathrm{tr}\ \epsilon^a T^a\gamma_5(1 - a\frac{R}{2}D) + O(\epsilon^2)\right\} \\
= \quad & 1 + 2\mathrm{tr}\ \epsilon^a T^a\gamma_5(1 - a\frac{R}{2}D) + O(\epsilon^2).
\end{aligned} \tag{8.2.7}$$

したがって，ヤコビアンからウォード・高橋恒等式への寄与は，

$$2\ \mathrm{tr}\ T^a\gamma_5(1 - \frac{a}{2}RD)$$

となることがわかり，$SU(N_f)$ に対しては $\mathrm{tr}T^a = 0$ なのでこの項はゼロとなるが，$U(1)$ に対してはゼロならず，後で示すように

$$2N_f \times \mathrm{index}(D)$$

となる [60]．ここで index (D) とは演算子 D のゼロ固有値 (eigen-value) に

属する右カイラル (right-handed) 状態と左カイラル (left-handed) 状態の数の差である．指数定理 (index theorem) や摂動展開などからこの量がアノマリーになることが確かめられ，GW 関係式を満たす格子フェルミオンはアノマリーを正しく再現することがわかる．

§8.3 GW 関係式を満たす D の構成

これまで見てきたように GW 関係式を満たす D は格子フェルミオンのディラック演算子としては最適のものであるが，具体的に構成できなければ，たんなる絵に描いた餅である．具体的な構成方法は大きく分けると 2 つあるが，ここでは前章で考察してドメインウォール・フェルミオンから構成したものを紹介する．ただし，長さの都合上，どのように構成したかの紹介は付録 I を参照していただきたい．

§8.3.1 オーバーラップ演算子

オーバーラップ演算子と呼ばれる GW 関係式を満たす演算子 D は具体的に以下のように与えられる [58].

$$D = \frac{1}{Ra}\left[1 + \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}}\right] \tag{8.3.1}$$

ここで $A = -M_0 + aD_{\rm W}$, $D_{\rm W}$ はゼロ質量の時のウィルソン・フェルミオン演算子 ($r = 1$) で

$$D_{\rm W} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu(\nabla^*_\mu + \nabla_\mu) - a\nabla^*_\mu\nabla_\mu]$$

$$[\nabla_\mu\psi](n) = \frac{1}{a}[U_{n,\mu}\psi(n+\hat{\mu}) - \psi(n)], \quad [\nabla^*_\mu\psi](n) = \frac{1}{a}\left[\psi(n) - U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi(n-\hat{\mu})\right]$$

であり，M_0 は DWQCD に現れる 5 次元フェルミオンの質量そのものである．

さて，オーバーラップ演算子 D がギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすことを証明しよう．ウィルソン・フェルミオンの性質から

$$\gamma_5 A \gamma_5 = A^\dagger \tag{8.3.2}$$

となるので，

$$V \equiv A(A^\dagger A)^{-1/2} \tag{8.3.3}$$

と置くと

$$\begin{aligned}\gamma_5 V \gamma_5 &= A^\dagger(AA^\dagger)^{-1/2} = \sum_n a_n A^\dagger (AA^\dagger)^n = (A^\dagger A)^{-1/2} A^\dagger \\ &= V^\dagger \end{aligned} \tag{8.3.4}$$

が示せる．また，

$$VV^\dagger = A(A^\dagger A)^{-1/2}(A^\dagger A)^{-1/2}A^\dagger = A(A^\dagger A)^{-1}A^\dagger = 1 \tag{8.3.5}$$

と V がユニタリーであることもいえる．これらの性質と $D = \dfrac{1}{Ra}(1+V)$ であることを用いると

$$\gamma_5 \frac{1}{RaD}\gamma_5 = \frac{1}{1+\gamma_5 V\gamma_5} = \frac{1}{1+V^\dagger} = \frac{V}{V+1} \tag{8.3.6}$$

$$= 1 - \frac{1}{1+V} \tag{8.3.7}$$

が言えて，これを少し変形すると

$$\gamma_5 D^{-1}\gamma_5 \frac{1}{Ra} = 1 - D^{-1}\frac{1}{Ra} \tag{8.3.8}$$

$$\gamma_5 D^{-1} + \gamma_5 D^{-1} = Ra\gamma_5 \tag{8.3.9}$$

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = RaD\gamma_5 D \tag{8.3.10}$$

なり，ギンスパーグ・ウィルソン関係式が導かれる．

この証明法を見ると，一般に

$$D = \frac{1}{Ra}(1+V), \quad \gamma_5 V\gamma_5 = V^\dagger, \quad VV^\dagger = 1 \tag{8.3.11}$$

の3つの条件を満たすなら，D はギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすことがわかる．オーバーラップ演算子 D が GW 関係式を満たすことはわかったが，この演算子がフェルミオンとして意味があるかどうかを見るために，自由場の場合について考察してみる．このとき，

$$A = -M_0 + i\sum_\mu \gamma_\mu \sin p_\mu a + \sum_\mu (1-\cos p_\mu a)$$

であるから，$A^\dagger A = s^2 + M(p)^2$, $M(p) = -M_0 + \sum_\mu (1-\cos p_\mu a)$ となる．

$M_0 = O(1)$ として，$a \ll 1$ を考えると

$$M(p) = \begin{cases} -M_0 + O(a^2) & \forall p_\mu \simeq 0 \\ -M_0 + 2n + O(a^2) & \exists p_\mu \simeq \pi/a, n = \#\text{ of } \pi\text{'s} \end{cases}$$

となるので，物理的な粒子 ($\forall p_\mu \simeq 0$) に対しては ($M_0 > 0$)

$$D = \frac{1}{Ra}\left[1 + \frac{ia\not{p} - M_0}{M_0}\right] = \frac{1}{RM_0} i\not{p}$$

となり，ゼロ質量のフェルミオンを記述している．一方，ダブラーに対しては，$0 < M_0 < 2$ と取れば，

$$D = \frac{1}{Ra}\left[1 + \frac{ia\not{p} - M_0 + 2n}{2n - M_0}\right] = \frac{1}{R(2n - M_0)}\left[i\not{p} + \frac{2}{a}(2n - M_0)\right]$$

となるので，$O(1/a)$ の重い質量を持つ極になり，低エネルギーの物理には寄与しない．したがって，式 (8.3.1) は GW 関係式を満たし，かつ低エネルギーで 1 つのゼロ質量のフェルミオンを記述するディラック演算子を具体的に与えていると言うことができる．

§8.3.2 オーバーラップ演算子の局所性

オーバーラップ演算子 D は常に GW 関係式を満たし，したがって，式 (8.2.1) で与えられる変換 (“ほとんど” カイラル変換) で不変であり，格子上のフェルミオンの定義として何も問題がないように見えるが，式 (8.3.1) の中の $(A^\dagger A)^{-1/2}$ はウィルソン演算子の逆を含むので非局所的 (non-local) になる可能性がある．局所性が破れていると，因果律が保証できないので連続極限で意味のある場の理論を構成するのが難しくなる．また，繰り込み群のところで議論した格子理論の普遍性 (Universality) も失われるため，連続極限の存在などの議論も難しくなる．格子理論では，最隣接以外の相互作用を含んだスカラーやフェルミオン作用，長方形ループなどプラケット以外のループを含んだゲージ作用は Unitarity(正確には Reflection Positivity) を破るが，局所性さえ満たしていれば普遍性のために連続極限の性質は容易に議論できる．このように局所性は重要であるのでオーバーラップ演算子が局所性を持つことを示す必要がある．自由場の場合には，$M_0 = O(1)$ であることを使い，D の局所性を示すことができたが，ここでは相互作用がある場合の局

所性について議論する．

局所性で問題になるのは $(A^\dagger A)^{-1/2}$ の部分なので，その局所性を議論する．まず，$(A^\dagger A)^{-1/2}$ に対応する演算子の核 (Kernel) $G(x,y)$ を次のように定義する．

$$\left(A^\dagger A\right)^{-1/2} \cdot \psi(x) = \sum_y G(x,y)\psi(y) \tag{8.3.12}$$

ここで，$\psi(x)$ は任意のフェルミオン場である．さて，$A^\dagger A$ が以下の不等式を満たすと仮定する．

$$u \;\; \leq \;\; A^\dagger A \leq v \tag{8.3.13}$$

ただし，u , v は正の定数であり，$A^\dagger A$ に対する不等式はその固有値に対する不等式として定義する．この時，$G(x,y)$ に対して次のことが証明できる [61]．

$$||G(x,y)|| \;\; \leq \;\; \frac{\kappa}{1-t}\exp\left[-\theta\frac{||x-y||_1}{2a}\right] \tag{8.3.14}$$

ここで，$G(x,y)$ に対するノルムは x,y を固定したときにカラーとスピノルの足を持つ 12×12 行列 $G(x,y)$ に対する行列のノルムであり，x と y の距離は格子上のタクシー・ドライバーの距離と呼ばれ，

$$||x-y||_1 \;\; = \;\; \sum_\mu |x_\mu - y_\mu| \tag{8.3.15}$$

で定義される．また，不等式に現われるパラメタ θ は

$$\cosh\theta \;\; = \;\; \frac{v+u}{v-u}, \quad \theta > 0 \tag{8.3.16}$$

で与えられ，$t = e^{-\theta}$,

$$\kappa \;\; = \;\; \left(\frac{4t}{v-u}\right)^{1/2} \tag{8.3.17}$$

である．上の不等式は $G(x,y)$ が x と y の距離の指数関数で減少し，$a\to 0$ の連続極限では，

$$||x-y||_1 = O(a) \tag{8.3.18}$$

以外の距離ではゼロになることを意味する．したがって，$(A^\dagger A)^{-1/2}$ は有限格子間隔では相互作用の強さは距離の指数関数で減少し，連続極限で局所的になっている．

次に問題になるのは，ウィルソン・フェルミオン演算子 A が条件 (8.3.13) を満たすかどうかである．上限 v の存在はユニタリ行列の性質より $||U_{n,\mu}|| \leq 1$ であることから，

$$||A|| = ||A^\dagger|| \leq 8 \quad \Rightarrow \quad ||A^\dagger A|| \leq ||A^\dagger|| \cdot ||A|| \leq 64 \tag{8.3.19}$$

と簡単に証明される．下限 u の存在は一般の場合には証明出来ないがゲージ場が十分滑らかで，プラケットから定義される場の強さがある上限値を越えない時，具体的にはすべてのプラケット $U_{\mu\nu}(n)$ が

$$||1 - U_{\mu\nu}(n)|| \leq \epsilon \tag{8.3.20}$$

を満たすなら，

$$A^\dagger A \geq 1 - 30\epsilon \tag{8.3.21}$$

となることが証明できる [61]．ただし，この不等式は A の中の M を $M = 1$ と取った場合である．したがって，$\epsilon < 1/30$ なら $u > 0$ なる下限が存在する．不等式 (8.3.21) はもう少し強くすることができ [62]，

$$A^\dagger A \geq 1 - 6(2 + \sqrt(2)\epsilon = 1 - (20.48\cdots)\epsilon \tag{8.3.22}$$

となる．したがって，ϵ に対する条件は $\epsilon < 1/20.48\cdots$ と少し緩くなる．

ここで示したように，ゲージ場が充分滑らかであればオーバーラップ演算子の局所性は問題ない．しかしながら，ドメインウォール・フェルミオンの場合には，ゲージ結合定数が大きくなり A や $A^\dagger$ がゼロ固有値を持つと，カイラル対称性に問題が生じる可能性がある．したがって，オーバーラップ演算子の場合は，同じような状況で，カイラル対称性の代わりに，その局所性に問題が出ることが考えられる．(6.3 章のウィルソン・フェルミオンを使った格子 QCD の相構造，特に相転移の秩序変数とゼロ固有値は局所性の問題と関係してくる．この問題に興味のある方は文献 [23] の第 9 章を参照して欲しい.) 次に見るように，実はオーバーラップ演算子を使った格子フェルミオ

ン (オーバーラップ・フェルミオンと呼ぶ) とドメインウォール・フェルミオンはほぼ等価であり，局所性の問題とカイラル対称性の問題は関係していることがわかる.

§8.4 ドメインウォール・フェルミオンとオーバーラップ・フェルミオンの関係

これまで述べたように $N_s \to \infty$ の極限でドメインウォール・フェルミオンは GW 関係式を満たすオーバーラップ・ディラック演算子に移行するのであるが，両者の関係をここで詳しく考察することで，ドメインウォール・フェルミオンに現れる軽いモードの本質を明らかにし，作用の持つ対称性を決定していきたい [63, 64].

ドメインウォール・フェルミオン作用を

$$S_{DW} = \bar{\psi}[\frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger) + MP_L + M^\dagger P_R]\psi \tag{8.4.1}$$

と書くことにする. ここで,

$$\nabla_\mu f(n) = \frac{1}{a}(U_{n,\mu}f(n+\mu) - f(n)) \tag{8.4.2}$$

$$\nabla_\mu^\dagger f(n) = \frac{1}{a}(f(n) - U_{n-\mu,\mu}^\dagger f(n-\mu)) \tag{8.4.3}$$

である. ここでは n,s などの添字は混乱のない限り省略している. さて，次のような変数変換

$$\psi' = (PP_L + P_R)\psi \tag{8.4.4}$$

$$\bar{\psi}' = \bar{\psi}(PP_R + P_L) \tag{8.4.5}$$

を考える. ここで，P は s の空間の「パリティ」変換であり,

$$P\psi_{n,s} = \psi_{n,N_s+1-s}$$

と定義される. 例えば，$N_s = 4$ では

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.4.6}$$

$$\tag{8.4.7}$$

となる．この変数変換をすると質量項はγ_5を含まなくなり，ベクトル型になる．実際，

$$M^H = MP = PM^\dagger \tag{8.4.8}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & B \\ 0 & -1 & B & 0 \\ -1 & B & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.4.9}$$

$$M^{PV} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & B \\ 0 & -1 & B & 0 \\ -1 & B & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{8.4.10}$$

を用いると（ここで$B = 1 - \frac{1}{2}\nabla_\mu \nabla_\mu^\dagger - M_0$である.），ドメインウォール・フェルミオン場とパウリ・ビラーズ場の作用はそれぞれ

$$D'_{DW} = \frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger) + M^H \tag{8.4.11}$$

$$D'_{PV} = \frac{1}{2}\gamma_\mu(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger) + M^{PV} \tag{8.4.12}$$

と通常のベクトル型の質量項を持つようになる．

この変数で見ると，クォーク場は

$$q = \psi'_{N_s} \tag{8.4.13}$$

$$\bar{q} = \bar{\psi}'_{N_s} \tag{8.4.14}$$

$s = N_s$の場のみを用いて書ける．このとき，カイラル変換は

$$\delta\psi_s = (\Gamma_5)_{st}\psi_t \tag{8.4.15}$$

$$\Gamma_5 = \begin{pmatrix} -\gamma_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\gamma_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_5 \end{pmatrix} \tag{8.4.16}$$

で与えられ，クォーク場は以下のように通常のカイラル変換の場合と同じ変換を受ける．

$$\delta q = \gamma_5 q \tag{8.4.17}$$

$$\delta\bar{q} = \bar{q}\gamma_5 \tag{8.4.18}$$

作用 (8.4.11) にカイラル変換 (8.4.15) を施すことで，次のような一種の DWQCD のウォード・高橋恒等式が導ける．

$$\{\Gamma_5 D'_{DW} + D'_{DW}\Gamma_5\}_{st} = 2\gamma_5\delta_{s,N_s/2}\delta_{t,N_s/2} \tag{8.4.19}$$

カイラル不変性の破れに相当する右辺の項は，質量項 M^H の具体形にカイラル変換をすることで導ける．

さて，ここで，(N_s-1) 個の重いフェルミオンを積分したと考えよう．このとき，クォーク場とそれに対応するパウリ・ビラーズ場が $s=N_s$ にしかないことを考えると，

$$S_{DW} = \bar{q}aD_{eff}q \tag{8.4.20}$$

$$S_{PV} = \bar{Q}(aD_{eff}+1)Q \tag{8.4.21}$$

となるはずである．ここで，D_{eff} は N_s-1 個の重いフェルミオンを積分した後の有効演算子である．(ここではその具体形は必要ない．) したがって，分配関数は

$$\bar{Z}_{DW} = Z_{DW}Z_{PV} = \frac{\det aD_{eff}}{\det(aD_{eff}+1)} = \det aD_{N_s} \tag{8.4.22}$$

となるので，行列式の比を最後に書いたように1つの演算子の行列式で表すとすると，その演算子は

$$aD_{N_s} = \frac{aD_{eff}}{aD_eff+1} \tag{8.4.23}$$

$$D_{N_s}^{-1} = a + D_{eff}^{-1} \tag{8.4.24}$$

(8.4.25)

で与えられる．$N_s \to \infty$ の極限でこの演算子はオーバーラップ・フェルミオン演算子になり，$R=2$ のギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすので，

$$\lim_{N_s \to \infty} D_{N_s}^{-1}\gamma_5 + \gamma_5 D_{N_s}^{-1} = a2\gamma_5 \tag{8.4.26}$$

を満足する．このことから，$N_s \to \infty$ でもともとの演算子は

$$\begin{aligned}\gamma_5 D_{eff}^{-1} + D_{eff}^{-1}\gamma_5 &= \lim_{N_s \to \infty} \left[\gamma_5 \left(D_{N_s}^{-1} - a\right) + \left(D_{N_s}^{-1} - a\right)\gamma_5\right] = 2a\gamma_5 - 2a\gamma_5 \\ &= 0\end{aligned} \tag{8.4.27}$$

となり，カイラル対称性を持っていることがわかる．つまり，ドメインウォール演算子（の有効演算子）はカイラル変換に対して不変になっているわけで，いままで予想していたことが実際に示された．カイラル対称性を持った格子フェルミオン演算子が構成されたが，ニールセン・二宮の定理とは矛盾していない．なぜなら，演算子 D_{eff} は

$$D_{eff} = \frac{aD}{1-aD} \tag{8.4.28}$$

$$D = \lim_{N_s \to \infty} D_{N_s} \tag{8.4.29}$$

となるので，オーバーラップ演算子 D が局所的であれば，D_{eff} は一般には非局所的で，定理の仮定を満たしていない．その非局所性を打ち消すために導入されたパウリ・ビラース場は質量項を持つため，カイラル対称性を壊してしまう．そのため，D はカイラル対称にはならず，その代わりにギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たし，$O(a)$ だけ修正された『カイラル』対称性を持つわけである．

最後にドメインウォール・フェルミオンと GW 関係式を満たすフェルミオンとの対応を表 8.1 にまとめておく．ただし，GW フェルミオンの対称性は $Z=1$ の場合のものを用いている．

表 8.1：ドメインウォール・フェルミオンと GW フェルミオンの関係

	DW Fermion	Overlap Fermion
クォーク場	q	$(1 - RaD/2)\Phi$
反クォーク場	$\bar{q}$	$\bar{\Phi}$
変換	カイラル	カイラル $+O(a)$
	$\delta q = \gamma_5 q$	$\delta\Phi = \gamma_5(1 - RaD)\Phi$
	$\delta\bar{q} = \bar{q}\gamma_5$	$\delta\Phi = \bar{\Phi}\gamma_5$
質量項	$m\bar{q}q$	$m\bar{\Phi}(1 - RaD/2)\Phi$

§8.5　ギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすディラック演算子の指数定理

ここでは，ギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たす格子フェルミオンのディラック演算子に対する指数定理を紹介する．

§8.5.1　指数定理

連続理論の場合の指数定理は

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_5 = n_+ - n_- \tag{8.5.1}$$

で与えられる．ここで，$n_\pm$ は連続理論のディラック演算子 D_c のゼロ固有値に対応する固有関数 $\psi_\pm$，

$$D_c\psi_\pm \ = \ 0, \qquad \gamma_5\psi_\pm = \pm\psi_\pm \tag{8.5.2}$$

の数を表わす．つまり，$n_+(n_-)$ は右巻き（左巻き）の D_c のゼロ・モードの数である．このことは，連続理論の場合に γ_5 のトレースがゼロであるという一見当たり前に見える性質が一般には成り立っていないことを意味している．連続理論では発散があるため，無限次元空間でのトレースの定義に不定性が存在し，正しくトレースを定義して計算すると指数定理が得られるのである．

格子フェルミオンのディラック演算子 D がギンスパーグ・ウィルソン関係式

$$\gamma_5 D + D\gamma_5 \ = \ aRD\gamma_5 D \tag{8.5.3}$$

を満たす場合には（以下では簡単のために局所演算子が $R_{nm} = R\delta_{nm}$ である場合を考える。ここで R は実数のパラメタである），指数定理は

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_5(1-\frac{1}{2}RaD) \quad = \quad n_+ - n_- \tag{8.5.4}$$

と変更される．これが格子フェルミオンの指数定理である．ここで，前と同様に $n_\pm$ は

$$D\phi_\pm \quad = \quad 0, \qquad \gamma_5\phi_\pm = \pm\gamma_5\phi_\pm \tag{8.5.5}$$

を満たすゼロ固有関数の数である．この格子ディラック演算子 D は次の第 2 の指数定理

$$\mathrm{Tr}\ \gamma_5 \quad = \quad n_+ - n_- + N_+ - N_- = 0 \tag{8.5.6}$$

も満たす．ここで，$N_\pm$ は次の条件を満たす（ダブラーに対応する）固有関数の数である．

$$D\Phi_\pm \quad = \quad \frac{2}{Ra}\Phi_\pm, \qquad \gamma_5\Phi_\pm = \pm\Phi_\pm \tag{8.5.7}$$

2 番目の指数定理は,「格子理論では" 正則化" が行われているため，γ_5 のトレースがゼロであるという性質に不定性がない」ことを意味している．また，γ_5 のトレースがゼロになるのは，物理的粒子とダブラーとの相殺で起こっていることもわかる．

以下では，この二つの「指数定理」を証明する．

§8.5.2 D の固有値と $\gamma_5 D$ の固有値

ϕ を D の固有関数とする．つまり，

$$D\phi = \lambda\phi \tag{8.5.8}$$

であるが，D はエルミートでないので，λ は一般に複素数である．したがって，

$$\phi^\dagger D^\dagger = \phi^\dagger\bar{\lambda} \tag{8.5.9}$$

となる．ここで，

$$\gamma_5 D\gamma_5 = D^\dagger \tag{8.5.10}$$

という性質を仮定すると，ギンスパーグ・ウィルソン関係式から，

$$\phi^\dagger(D+\gamma_5 D\gamma_5)\phi \quad = \quad \phi^\dagger(Ra\gamma_5 D\gamma_5 D)\phi \tag{8.5.11}$$

となるので，λ は

$$\lambda+\bar{\lambda} \quad = \quad Ra\bar{\lambda}\lambda \tag{8.5.12}$$

という関係を満たすはずである．$\lambda = x+iy$ と置くと

$$2x = Ra(x^2+y^2) \quad \rightarrow \quad (x-\frac{1}{Ra})^2+y^2 = \frac{1}{R^2a^2} \tag{8.5.13}$$

となるので，固有値は複素平面上で $(1/(Ra),0)$ を中心とした半径 $1/(Ra)$ の円になる．(図 8.1 を参照)．連続理論のディラック演算子の固有値は $\pm iy$ であるから，原点付近の D の固有値は連続理論のものと $a\rightarrow 0$ の極限で一致する．一方，自由場の時のダブラーの質量は $2/(Ra)$ だったので，$(0,2/(Ra))$ 付近の固有値はダブラーのスペクトラム (spectrum) に対応している．

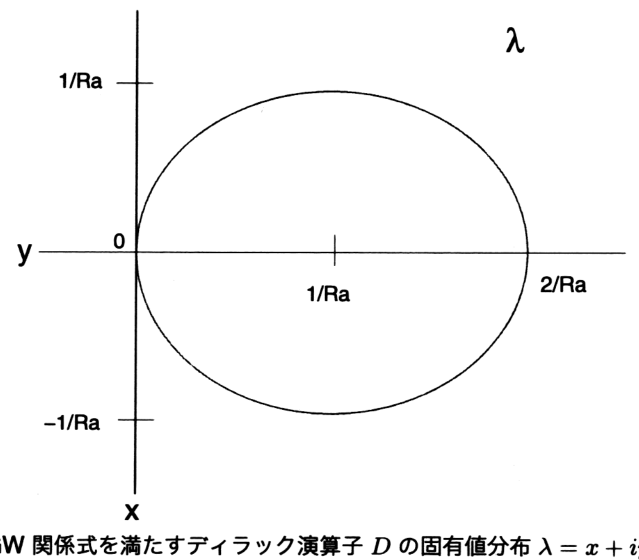


図 8.1：GW 関係式を満たすディラック演算子 D の固有値分布 $\lambda = x+iy$．中心が $(1/(Ra),0)$ で半径 $1/(Ra)$ の円であたえられる．連続理論のディラック演算子の固有値は純虚数なので虚軸で与えられる．原点付近で両者が一致しており，$a\rightarrow 0$ では円の半径が大きくなるので一致する領域が増えていく．

さて，D の性質から $H \equiv \gamma_5 D$ はエルミートになるので，この演算子の固有値の分類を考える．$\Gamma_5 = \gamma_5(1 - \frac{Ra}{2}D)$ と置き，ギンスパーグ・ウィルソン関係式を用いると

$$\Gamma_5\gamma_5 D + \gamma_5 D\Gamma_5 = D - \frac{1}{2}Ra\gamma_5 D\gamma_5 D + \gamma_5 D\gamma_5 - \frac{1}{2}Ra\gamma_5 D\gamma_5 D = 0 \tag{8.5.14}$$

となり，H と Γ_5 は反可換である．したがって，H の固有値は

$$H\phi_n = \lambda_n\phi_n \tag{8.5.15}$$

$$H(\Gamma_5\phi_n) = -\lambda_n(\Gamma_5\phi_n) \tag{8.5.16}$$

となり，$(\lambda_n, -\lambda_n)$ の組になってあらわれる．ただし，

$$(\Gamma_5\phi_n, \Gamma_5\phi_n) = 0 \tag{8.5.17}$$

の場合は $\pm$ が組になる必要はない．この場合は

$$\begin{aligned}(\phi_n, (\gamma_5 - \frac{Ra}{2}H)(\gamma_5 - \frac{Ra}{2}H)\phi_n) &= (\phi_n, (1 - \frac{R^2a^2}{4}H^2)\phi_n) \\ = \quad (1 - \frac{Ra}{2}\lambda_n)(1 + \frac{Ra}{2}\lambda_n) &= 0\end{aligned} \tag{8.5.18}$$

（ここで (ϕ, ψ) は内積であり，固有関数は $(\phi_n, \phi_n) = 1$ と規格化しておくことにする.）となるので，固有値は $\lambda_n = \pm\frac{2}{Ra}$ である．この時

$$\gamma_5\phi_n = \frac{Ra}{2}H\phi_n = \pm\phi_n \tag{8.5.19}$$

なので，固有関数は γ_5 の固有状態になっている．

H の固有値と固有関数の性質をまとめると以下のようになる．

1. $\lambda_n = 0$（ゼロ固有値）

この時，固有関数は γ_5 の固有状態になる．つまり，

$$H\phi_n = 0 \tag{8.5.20}$$

$$\gamma_5\phi_n = \pm\phi_n \tag{8.5.21}$$

である．なぜなら，ギンスパーグ・ウィルソン関係式を使うと，

$$\begin{aligned}H\gamma_5\phi_n = \gamma_5 D\gamma_5\phi_n &= (-D + Ra\gamma_5 D\gamma_5 D)\psi_n \\ &= (-\gamma_5 H + RaH^2)\psi = 0\end{aligned} \tag{8.5.22}$$

となるので，$\gamma_5\psi_n$ も H のゼロ固有値の状態になる．したがって，

$$\frac{1\pm\gamma_5}{2}\psi_n \tag{8.5.23}$$

は H のゼロ固有値の状態でかつ γ_5 の固有状態になっている．(± の 2 つのうち，どちらかがゼロになる場合もあるので，ゼロ固有状態がペアになる必要はない．)

2. 固有値が $0<|\lambda_n|<\dfrac{2}{Ra}$ である場合．前に述べたように固有値は $\pm\lambda_n$ と組になって現れる．前の議論では $\lambda_n\neq\pm\dfrac{2}{a}$ であればよかったが，固有値に対して上の不等式が成り立つことを示す．

$$\begin{aligned} H\phi_n &= \lambda_n\phi_n & (8.5.24)\\ H(\Gamma_5\phi_n) &= -\lambda_n(\Gamma_5\phi_n) & (8.5.25)\end{aligned}$$

また，$H\Gamma_5+\Gamma_5H=0$ の両側から $\phi_n^\dagger$ と ϕ_n で挟むと，

$$\begin{aligned} \phi_n^\dagger\Gamma_5\phi_n &= 0 & (8.5.26)\\ \phi_n^\dagger\gamma_5\phi_n &= \frac{Ra}{2}\lambda_n & (8.5.27)\end{aligned}$$

が言える．したがって，

$$|\frac{Ra}{2}\lambda_n| = |\phi_n^\dagger\gamma_5\phi_n|\leq|\phi_n^\dagger||\gamma_5\phi_n|=1 \tag{8.5.28}$$

となり，固有値に上限があり不等式が成り立つことが示された．

3. $\lambda_n=\pm\dfrac{2}{Ra}$ の場合．
この時，

$$\Gamma_5\phi_n=0 \tag{8.5.29}$$

が成り立つので，

$$\begin{aligned} H\phi_n &= +\frac{2}{Ra}\phi_n,\quad \gamma_5\phi_n=\phi_n & (8.5.30)\\ H\phi_n &= -\frac{2}{Ra}\phi_n,\quad \gamma_5\phi_n=-\phi_n & (8.5.31)\end{aligned}$$

となり，固有値の正負と γ_5 の固有値の正負が対応している．

§8.5.3 指数定理の証明

今までわかった H の固有値と固有関数の性質を用いて指数定理の証明をしよう．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\ \Gamma_5 &= \sum_n \phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n \\
&= \sum_{\lambda_n=0} \phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n + \sum_{0<|\lambda_n|<2/(Ra)} \underbrace{\phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n}_{\to 0} + \sum_{\lambda_n=\pm 2/(Ra)} \underbrace{\phi_n^\dagger \Gamma_5 \phi_n}_{\to 0} \\
&= \sum_{\lambda_n=0} \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = n_+ - n_-
\end{aligned} \tag{8.5.32}$$

2 行目の第 2 項は式 (8.5.26) からゼロになるし，第 3 項は Γ_5 のゼロ固有値状態なのでやはりゼロになる．H のゼロ固有値は D のゼロ固有値と 1 対 1 対応があるので，指数定理が証明されたことになる．

一方，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\ (-\frac{1}{2}Ra\gamma_5 D) &= -\frac{Ra}{2}\sum_n \phi_n^\dagger \phi_n \lambda_n \\
&= -\frac{Ra}{2}\sum_{0<|\lambda_n|<2/(Ra)} (\lambda_n - \lambda_n) - \frac{Ra}{2}\sum_{\lambda_n=\pm 2/(Ra)} \lambda_n \\
&= -(N_+ - N_-)
\end{aligned} \tag{8.5.33}$$

となる．後で示すように $\pm\frac{2}{Ra}$ の固有値を持つ状態はダブラーに対応するので，$N_\pm$ はダブラーの指数になる．さらに，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\ \gamma_5 &= \sum_n \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n = \sum_{\lambda_n=0} \phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n + \sum_{0<|\lambda_n|<2/(Ra)} \overbrace{\phi_n^\dagger \gamma_5 \phi_n}^{\to \frac{Ra\lambda_n}{2}} \\
&+ \sum_{\lambda_n=\pm 2/(Ra)} \frac{Ra\lambda_n}{2} = n_+ - n_- + N_+ - N_- = 0
\end{aligned} \tag{8.5.34}$$

と 2 番目の指数定理がでる．最後の式では格子上では γ_5 がきちんと定義されているので，そのトレースはゼロになることを用いている．この式は，$\mathrm{Tr}\ \gamma_5 = 0$ が物理的粒子とダブラーの間での相殺で起こっていることを示している．また，$\mathrm{Tr}\ \gamma_5 = 0$ であるのから，結局，$\mathrm{Tr}\ \Gamma_5 = \mathrm{Tr}\ (-\frac{1}{2}a\gamma_5 D)$ が言える．

最後に，$N_{\pm}$ が doubler の数であることを見てみよう．ほとんど自由場の場合を考えると，ギンスパーグ・ウィルソン演算子に現れる A は，

$$A = -M_n + i\not{D} \tag{8.5.35}$$

$$M_n = \frac{1}{a}(M_0 - 2n) \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \tag{8.5.36}$$

と書くことができる．$0 < M_0 < 2$ であるとすると，ギンスパーグ・ウィルソン演算子を作用させると，

$$D\psi = \frac{1}{Ra}(1 + \frac{A}{\sqrt{A^\dagger A}})\psi = \frac{1}{Ra}(1 + \frac{i\not{D} - M_n}{\sqrt{\not{D}^2 + M_n^2}})\psi \tag{8.5.37}$$

となる．$\not{D}\psi = 0$ を満たす軽いモードに対しては

$$\gamma_5 D\psi = \gamma_5 \frac{1}{Ra}(1 - \frac{M_n}{|M_n|})\psi = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ \dfrac{2}{Ra}\gamma_5\psi & n \neq 0 \end{cases} \tag{8.5.38}$$

となるので，ダブラーは H の固有値が $\pm\frac{2}{Ra}$ を持った状態であることがわかる．ただし，同時に，γ_5 の固有状態（$\gamma_5\psi = \pm\psi$）になっている必要がある．

GW 関係式を満たす演算子 D の固有値や固有関数のいろいろな性質については付録 J にまとめておく．

第 9 章

第I部のまとめ

第8章までで格子理論の基礎は一通り学んだことになる．スカラー理論は構造が簡単であるため，格子上の場の理論とはどのようなものかを理解するのに役立ったと思う．通常の教科書に比べて，繰り込み群による量子場の理論の構成の部分の記述が詳しくなったが，格子上の場の理論の連続極限を直観的に理解するには必要だと考え，あえて具体的な計算も交えて詳しく議論した．(実際，この繰り込み群による理解は普遍的であり，学生の時から今まで大変役に立っている.）格子理論が必要とされる最も重要な理由は，ゲージ理論をゲージ不変に量子化できることである．したがって，格子上のゲージ場の理論は本書のなかで最も基本的でかつ重要なところである．通常の連続理論でのゲージ場の理論に比べて多くの点で異なっており，読者の方々は戸惑われたかもしれない．格子上のゲージ場の理論を通して，ゲージ理論の力学を摂動論から離れて“感覚的に”身に付けていただければ，と思っている．ゲージ場の場合に比べて，フェルミオンの場合，その格子化は単純に思われるが，本文でも触れたように，場の量子論のアノマリーの問題とも絡んでおり，現在でも大きな研究テーマとなっている．筆者の研究分野の1つでもあるので，その記述はかなり長くなり，最新の結果をも含めたものになった．特に，最後のギンスパーグ・ウィルソン関係式のところの結果は，連続のディラック演算子を格子正則化したらどうなるか，アノマリーはそこからどのように現われるのか，を具体的に記述しており，一段高い場の理論の理解になっていると考えている．この分野は現在でも研究が続いており，最近の結果の一部は，(本書の記述と重なる部分も多いが）文献 [23] に紹介されているので，

興味のある方は参考にして欲しい．

格子理論の応用の1つであるが，基礎の1つとして取り上げても良かったものとして，「格子上での有限温度の場の理論」があげられる．残念ながら，筆者の時間的制約，紙面のスペース的制約から，今回は割愛した．その代わりに，優れたレビューとして評判の高い文献 [66] を挙げておくので，この分野を勉強したい方は参考にしてほしい．

格子理論の応用のなかで重要な分野については，応用編としてまとめたいと思っているが，筆者が怠け者のため，また，分量の関係上，本書ではなく，本書の続編として刊行することになってしまった．その代りに，格子QCDの研究で中心的な方法となっているモンテカルロ法による格子QCDの数値計算を，ハドロンの質量をどのように計算すればいいか，を具体例に取って，第II部「実践編」で紹介したい．そこでは，通常1つのテキストにはまとめては書かれてはいないが数値計算で必要となるさまざまのことを，出来る限り自己完結的になるようにまとめることを意図して執筆した．読者が実際に格子理論の数値計算で研究を始める時の助けになれば幸いである．

ば，数値的に計算したプラケットの値 P から $U = P^{1/4}$ として U を計算した場合はそれに対応した摂動展開の結果

$$U = 1 - \frac{c_P}{4} g^2 \tag{17.3.14}$$

を用いなければならない．このとき，

$$\tilde{Z}_A = 1 + \frac{g^2 C_F}{16\pi^2} \left(z_A + \frac{16\pi^2 c_P}{4C_F} \right) = 1 + \frac{g^2 C_F}{16\pi^2} z_A^{\mathrm{MF}} \tag{17.3.15}$$

となる．プラケット作用の場合，$z_A^{\mathrm{MF}} = -5.926$ となり，1／3 程度に減っており，摂動展開の収束性が良くなっていることを示唆している．U の値としてこれ以外に良く使われるものとしては，ランダウ・ゲージに固定して計算したリンク変数の期待値 $U = \langle U_{n,\mu} \rangle$ やパイ中間子の質量の外挿から求められた臨界ホッピング・パラメタ K_c から $U = 1/(8rK_c)$ として得られたものなどがあるが，それぞれに対応した摂動展開を用いなければいけない．

平均場改良した Z_A の値も表 17.1 に載せておく．ここでは $U = P^{1/4}$ を用いた．tadpole 図からの寄与を取り入れたため Z_A の 1 からのずれが大きくなっていることに注目してほしい．

付録 A

d 次元 $\lambda\phi^4$ 理論の繰り込み変換の計算

この付録では 3 章で使った d 次元 $\lambda\phi^4$ 理論の繰り込み変換を具体的に計算する．本章では実空間での繰り込み変換を考えていたが，実際の計算は運動量空間で行った方が簡単になる．実空間の場 $\phi(n)$ と運動量空間の場 $\phi(p)$ との関係を

$$\phi(n) \quad = \quad \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^d p}{(2\pi)^{d/2}} e^{ip\cdot na}\phi(p) \tag{A.0.1}$$

で与えると，運動量空間での作用は

$$\begin{aligned} S \quad &= \quad \frac{1}{2}\int d^d p\phi(-p)f(p^2)\phi(p) \\ &+ \quad \frac{\lambda}{(2\pi)^d}\int d^d p\, d^d q\, d^d k\, d^d l\, \delta^d(p+q+k+l)\phi(p)\phi(q)\phi(k)\phi(l) \\ &+ \quad O(\phi^6) \end{aligned} \tag{A.0.2}$$

となる．ここで，$f(p^2)$ は $p=0$ の近傍で

$$f(p^2) \quad = \quad \mu + p^2 + O(p^4) \tag{A.0.3}$$

と振る舞うと仮定する.（ただし，$\mu = M^2$ である.）元々の作用の場合は

$$f(p^2) \quad = \quad \mu + \frac{2}{a^2}\sum_{\mu}(1-\cos(p_\mu a)) \tag{A.0.4}$$

なので，確かに仮定は成り立っている．格子間隔を a とすると，運動量空間 Λ^d は

$$\Lambda^d \quad = \quad \{p| -\frac{\pi}{a} < p_i < \frac{\pi}{a}, \forall i = 1, 2, \cdots, d\} \tag{A.0.5}$$

で与えられるが，この空間を $\Lambda^d = \Lambda^d_{\rm in} \bigcup \Lambda^d_{\rm out}$ と 2 つに分ける．ここでは，

$$\Lambda^d_{\rm in} \quad = \quad \{p| -\frac{\pi}{Na} < p_i < \frac{\pi}{Na}, \forall i = 1,2,\cdots,d\} \tag{A.0.6}$$

$$\Lambda^d_{\rm out} \quad = \quad \{p| \quad p_i| \geq \frac{\pi}{Na}, \exists i = 1,2,\cdots,d\} \tag{A.0.7}$$

と定義している．この時，$\lambda^d_{\rm in} \bigcap \Lambda^d_{\rm out} = 0$ である．実空間での繰り込みは N^d の格子点のスピン変数を平均してブロックスピンを作るという操作を考えるが，運動量空間でこれに対応するのは $p \in \Lambda^d_{\rm out}$ に対応する $\phi(p)$ を積分することである[1]．そのためにスピン変数を

$$\phi(p) \quad = \quad \begin{cases} \phi_{\rm in}(p), & p \in \Lambda^d_{\rm in} \\ \phi_{\rm out}(p), & p \in \Lambda^d_{\rm out} \end{cases} \tag{A.0.8}$$

と分離し，$\phi_{\rm out}(p)$ を積分する．その結果は $\phi_{\rm in}(p)$ の関数となるが，ここで，$Na \to a$ と格子間隔を再定義し（これは運動量を $k = Np$ として k を考えることに相当する），さらにブロックスピン変数を以下のように規格化する．

$$\phi^N(k) = N^{-\theta}\phi_{\rm in}(k/N) \tag{A.0.9}$$

ここでは，$-\pi/a < k_i < \pi/a$ $(i = 1,2,\cdots,d)$ であり，θ は規格化のためのパラメタで，後で示すように変換の固定点が存在するように選ぶ．結局，

$$\phi(p) = \phi_{\rm in}(p) + \phi_{\rm out}(p) \quad \to \quad \phi^N(k) = N^{-\theta}\phi_{\rm in}(k/N) \tag{A.0.10}$$

がブロックスピン変換によるスピン変数の対応である．

式 (A.0.8) というスピン変数の分離を用いて作用を書き換えると

$$\begin{aligned} S[\phi] \quad &= \quad \frac{1}{2}\int_{p_{\rm in}} \phi_{\rm in}(-p) f(p^2) \phi_{\rm in}(p) + \int_{p_{\rm out}} \phi_{\rm out}(-p) f(p^2) \phi_{\rm out}(p) \\ &+ \quad \lambda \left[V_0(\phi_{\rm in}) + \sum_{i=1}^{4} V_i(\phi_{\rm in}, \phi_{\rm out}) \right] \end{aligned} \tag{A.0.11}$$

ここで，運動量の積分は

$$\int_{p_{\rm in,out}} \quad = \quad \int_{p \in \Lambda^d_{\rm in,out}} d^d p \tag{A.0.12}$$

[1] この操作は実空間のブロックスピン変換には厳密には対応しないが，ブロックスピン変換のある近似と考えることができる．文献 [16] を参照．

と定義した．また，相互作用項は

$$V_0(\phi_{\rm in}) = \frac{1}{4!}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{(p_{1,2,3,4})_{\rm in}} \delta^d(\sum_{i=1}^{4} p_i)\prod_{i=1}^{4}\phi_{\rm in}(p_i) \tag{A.0.13}$$

$$V_1(\phi_{\rm in},\phi_{\rm out}) = \frac{4}{4!}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{(p_1)_{\rm out},(p_{2,3,4})_{\rm in}} \delta^d(\sum_{i=1}^{4} p_i) \times \phi_{\rm out}(p_1)\prod_{i=2}^{4}\phi_{\rm in}(p_i) \tag{A.0.14}$$

$$V_2(\phi_{\rm in},\phi_{\rm out}) = \frac{6}{4!}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{(p_{1,2})_{\rm out},(p_{3,4})_{\rm in}} \delta^d(\sum_{i=1}^{4} p_i) \times \prod_{i=1}^{2}\phi_{\rm out}(p_1)\prod_{i=3}^{4}\phi_{\rm in}(p_i) \tag{A.0.15}$$

$$V_3(\phi_{\rm in},\phi_{\rm out}) = V_1(\phi_{\rm out},\phi_{\rm in}) \tag{A.0.16}$$

$$V_4(\phi_{\rm in},\phi_{\rm out}) = V_0(\phi_{\rm out}) \tag{A.0.17}$$

で与えられる．

$\phi_{\rm out}$ を積分して得られる $\phi_{\rm in}$ に対する作用 $S'[\phi_{\rm in}]$ を考える．具体的な計算に入る前に次の点を注意しておく．

- $\phi_{\rm in}$ に依らない定数項は考えなくて良い．この項は自由エネルギー (分配関数の対数を取ったもの) の値を変化させるだけなのでパラメタの繰り込み変換の計算には必要ない．もちろん，自由エネルギーの変化に興味がある場合は計算する必要がある．
- $\phi_{\rm in}$ の奇数ベキの項は考えなくて良い．もともと作用が $\phi\to-\phi$ という変換で不変であるため奇数ベキの項は繰り込み変換では生成されない．これは繰り込み変換が有限自由度の積分に対応するため，変換が対称性を自発的に破ることがないためである．
- $\phi_{\rm in}^n$ で $n>2\cdot d/(d-2)$ の項は無視して良い．これは，場のスケール変換を考えると大きな n の項に対応するパラメタは必ず減少することが分かり，重要でない (irrelevant) 相互作用になっているからである．このことは実際に計算をすると分かるのだが，この点を心に留めて計算を進めると見通しが良くなる．

- $d=3$ の時は上の議論から $\phi_{\rm in}^6$ 相互作用も繰り込み変換に効いてくる可能性があるが，繰り込み群の変換の流れのおおよその様子は $\phi_{\rm in}^4$ 項の振舞いで決まるので，ここの計算では考えないことにする．
- $d=2$ は全ての項が重要になり繰り込み群は難しくなるのでここでは取り扱わない．$d=2$ のスカラー場の理論の解析は共形場の理論など他の手法が有効である．

以上の注意を念頭に計算を具体的に進めていこう．定義より

$$\begin{aligned}\exp(-S'[\phi_{\rm in}]) &= \int \mathcal{D}\phi_{\rm out} \exp(-S[\phi_{\rm in}+\phi_{\rm out}]) \\ &= \exp(-S[\phi_{\rm in}])\langle \exp\left[-\lambda\sum_{i=1}^{4} V_i\right]\rangle_0 Z_0 \end{aligned} \tag{A.0.18}$$

となる．ただし，

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi_{\rm out}\,\mathbf{1}\exp[-\frac{1}{2}\int d^dp\,\phi_{\rm out}(-p)f(p^2)\phi_{\rm out}(p)] \tag{A.0.19}$$

$$\langle \mathcal{O}\rangle_0 = \frac{1}{Z_0}\int \mathcal{D}\phi_{\rm out}\,\mathcal{O}(\phi_{\rm out})\exp[-\frac{1}{2}\int d^dp\,\phi_{\rm out}(-p)f(p^2)\phi_{\rm out}(p)] \tag{A.0.20}$$

である．したがって，$\phi_{\rm in}$ に依らない定数 Z_0 の部分を無視すると

$$\begin{aligned} S'[\phi_{\rm in}] &= S[\phi_{\rm in}] - \ln\langle \exp\left[-\lambda\sum_{i=1}^{4} V_i\right]\rangle_0 \\ &= S[\phi_{\rm in}] - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\langle\underbrace{V;V;\cdots;V}_{n}\rangle_0 \end{aligned} \tag{A.0.21}$$

となる．ここで，$V=\sum_{i=1}^{4} V_i$ である．また，キュムラント展開

$$\ln\langle e^{-\lambda V}\rangle_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\lambda)^n}{n!}\langle\underbrace{V;V;\cdots;V}_{n}\rangle_0 \tag{A.0.22}$$

を用いている．低次のキュムラントは

$$\langle A;B\rangle_0 = \langle AB\rangle_0 - \langle A\rangle_0\langle B\rangle_0 \tag{A.0.23}$$

$$\begin{aligned}\langle A;B;C\rangle_0 &= \langle ABC\rangle_0 - \langle AB\rangle_0\langle C\rangle_0 - \langle BC\rangle_0\langle A\rangle_0 \\ &- \langle CA\rangle_0\langle B\rangle_0 + 2\langle A\rangle_0\langle B\rangle_0\langle C\rangle_0 \end{aligned} \tag{A.0.24}$$

などと与えられる．

この結果を使って λ^2 までで $S'[\phi_{\rm in}]$ を求めると，

$$S'[\phi_{\rm in}] = S[\phi_{\rm in}] + \lambda\langle V\rangle_0 - \frac{\lambda^2}{2!}\langle V;V\rangle_0 \tag{A.0.25}$$

となる．期待値 $\langle V\rangle_0$ などを計算するには，相互作用のない場合の 2 点関数のファイマンン規則[2]

$$\langle\phi_{\rm out}(p)\phi_{\rm out}(q)\rangle_0 = \frac{\delta^d(p+q)}{f(p^2)} \tag{A.0.26}$$

と Wick の縮約規則

$$\langle\phi(p_1)\phi(p_2)\cdots\phi(p_{2n})\rangle_0 = \sum_\sigma\prod_{i=1}^n\langle\phi(p_{\sigma(i,1)})\phi(p_{\sigma(i,2)})\rangle_0 \tag{A.0.27}$$

を用いれば良い．ただし，σ は $2n$ 個の整数を n 組の 2 個の整数に分ける変換で

$$\begin{aligned}\sigma:(1,2,\cdots,2n) \to\ & \{(\sigma(1,1),\sigma(1,2)),(\sigma(2,1),\sigma(2,2)),\cdots,\\ & (\sigma(i,1),\sigma(i,2)),\cdots,(\sigma(n,1),\sigma(n,2))\}\end{aligned} \tag{A.0.28}$$

と与えられ，σ に関する和は，すべての分け方に関しての和である．

始めに λ の項を計算しよう．作用の Z_2 対称性より，$\langle V_1\rangle_0 = \langle V_3\rangle_0 = 0$ となる．また，$\langle V_4\rangle_0$ は $\phi_{\rm in}$ に依存しない定数なので計算する必要がない．計算すべきものは 1 項だけで以下のように計算される．

$$\langle V_2\rangle_0 = \frac{6}{4!}B_1(N,\mu)2M(\phi_{\rm in}) \tag{A.0.29}$$

$$M(\phi_{\rm in}) = \frac{1}{2}\int_{p_{\rm in}}\phi_{\rm in}(-p)\phi_{\rm in}(p) \tag{A.0.30}$$

ここで，

$$B_1(N,\mu) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{q_{\rm out}}\frac{1}{f(q^2)} \tag{A.0.31}$$

である．この項は $\phi_{\rm in}$ の質量項 $M(\phi_{\rm in})$ に寄与する．

---

[2] ただし，$\phi_{\rm out}$ の積分が収束するためには $\mu \geq 0$ が必要である．

λ^2 のゼロでない項は

$$\langle V_1^2\rangle_0 + \langle V_3^2\rangle_0 + \langle V_2;V_2\rangle_0 + \langle V_4;V_4\rangle_0 + 2\langle V_1V_3\rangle_0 + 2\langle V_2;V_4\rangle_0 \tag{A.0.32}$$

となるが，このうち $\langle V_4;V_4\rangle_0$ は $\phi_{\rm in}$ に依らないので計算しない．その他の項を順番に計算していく．

$$\begin{aligned}\langle V_1^2\rangle_0 &= (\frac{1}{3!})^2\frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int_{(p_i)_{\rm in},i=1,2,\cdots,6}\delta^d(\sum_{i=1}^{6}p_i)\prod_{i=1}^{6}\phi_{\rm in}(p_i)\\ &\times \frac{1}{f((p_1+p_2+p_3)^2)}\end{aligned} \tag{A.0.33}$$

ただし，$p_1+p_2+p_3\in\Lambda^d_{\rm out}$ となる必要がある．この項は $\phi_{\rm in}^6$ という次元の高い相互作用なので，我々の近似的な繰り込み群の計算ではこの項の寄与を無視する．実際，p_i が π/N に比べて充分小さければ，$p_1+p_2+p_3\notin\Lambda^d_{\rm out}$ なのでこの項の寄与は確かにゼロになっている [16]．次の項は

$$\begin{aligned}\langle V_2;V_2\rangle_0 &= 2(\frac{6}{4!})^2\frac{1}{(2\pi)^{2d}}\int_{(p_i)_{\rm in},i=1\sim4}\delta^d(\sum_{i=1}^{4}p_i)\prod_{i=1}^{4}\phi_{\rm in}(p_i)\\ &\times \int_{q_{\rm out}}\frac{1}{f(q^2)}\frac{1}{f((p_1+p_2-q)^2)}\end{aligned} \tag{A.0.34}$$

となるが，p_i が π/N に比べて充分小さい場合を考えて，p_i について展開すれば，積分は

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{q_{\rm out}}\frac{1}{f(q^2)}\frac{1}{f((p_1+p_2-q)^2)} = B_2(N,\mu)+O((p_1+p_2)^2) \tag{A.0.35}$$

と評価される．ここで，

$$B_n = \left\{\frac{1}{(2\pi)^d}\right\}^{n-1}\int_{(q_i)_{\rm out},i=1\sim n}\delta^d(\sum_{i=1}^{n}q_i)\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{f(q_i^2)} \tag{A.0.36}$$

である．これを使うと

$$\langle V_2;V_2\rangle_0 \simeq 3B_2(N,\mu)V_0(\phi_{\rm in}) \tag{A.0.37}$$

となる．また，

$$\begin{aligned}\langle V_3; V_3\rangle_0 &= 6\left(\frac{4}{4!}\right)^2 \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{p_{\rm in}} \phi_{\rm in}(-p)\phi_{\rm in}(p) \\ &\times \int_{(q_i)_{\rm out}, i=1,2,3} \delta^d(q_1+q_2+q_3-p)\frac{1}{f(q_1^2)\cdot f(q_2^2)\cdot f(q_3^2)} \\ &\simeq \frac{B_3(N,\mu)}{3} M(\phi_{\rm in}) - \frac{C_3(N,\mu)}{3} K(\phi_{\rm in}) \end{aligned} \tag{A.0.38}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} C_3(N,\mu) &= \frac{1}{(2\pi)^{2d}} \int_{(q_i)_{\rm out}, i=1,2,3} \delta^d(q_1+q_2+q_3)\frac{1}{f(q_1^2)\cdot f(q_2^2)\cdot f(q_3^2)^2} \\ &\times \frac{d}{dq_3^2} f(q_3^2) \end{aligned} \tag{A.0.39}$$

$$K(\phi_{\rm in}) = \frac{1}{2}\int_{p_{\rm in}} \phi_{\rm in}(-p)p^2\phi_{\rm in}(p) \tag{A.0.40}$$

である．同じように計算していくと，

$$\langle V_1 V_3\rangle_0 = 0 \tag{A.0.41}$$

$$\langle V_2; V_4\rangle_0 = \frac{B_1(N,\mu)B_2(N,\mu)}{4} M(\phi_{\rm in}) \tag{A.0.42}$$

となる．

以上の結果を組み合わせると，充分な低エネルギー，つまり，場 $\phi_{\rm in}$ の高次の微分項を無視できる場合の最終結果は

$$\begin{aligned} S'[\phi_{\rm in}] &= \left\{1+\lambda\frac{B_1(N,\mu)}{2} - \lambda^2\left(\frac{B_3(N,\mu)}{6}+\frac{B_1(N,\mu)B_2(N,\mu)}{4}\right)\right\} M(\phi_{\rm in}) \\ &+ \left\{1+\lambda^2\frac{C_3(N,\mu)}{6}\right\} K(\phi_{\rm in}) \\ &+ \lambda\left\{1-\lambda\frac{3B_2(N,\mu)}{2}\right\} V_0(\phi_{\rm in}) \end{aligned} \tag{A.0.43}$$

となる．最後に場 $\phi_{\rm in}$ と運動量 p を

$$\phi_{\rm in}(p) = N^\theta \phi'(k) \tag{A.0.44}$$

$$Np = k \tag{A.0.45}$$

と規格化すると，

$$\int_{-\pi/N}^{\pi/N} d^d p\ \phi_{\rm in}(-p)\phi_{\rm in}(p) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} d^d k\ N^{2\theta-d}\phi'(-k)\phi'(k) \quad \text{(A.0.46)}$$

$$\int_{-\pi/N}^{\pi/N} d^d p\ \phi_{\rm in}(-p)p^2\phi_{\rm in}(p) \;=\; \int_{-\pi}^{\pi} d^d k\ N^{2\theta-d-2} \times \phi'(-k)k^2\phi'(k) \quad \text{(A.0.47)}$$

$$\int_{-\pi/N}^{\pi/N}\prod_{i=1}^{4} d^d p_i\ \phi_{\rm in}(p_i)\delta^d(\sum_{i=1}^{4} p_i) \;=\; N^{4\theta-3d}\int_{-\pi}^{\pi}\prod_{i=1}^{4} d^d k_i \times \delta^d(\sum_{i=1}^{4} k_i)\phi'(k_i) \quad \text{(A.0.48)}$$

となるから，場 ϕ' に対する作用は

$$\begin{aligned} S[\phi'] &= N^{2\theta-d-2}\left\{1+\lambda^2\frac{C_3(N,\mu)}{6}\right\}K(\phi') \\ &+ N^{2\theta-d}\left\{1+\lambda\frac{B_1(N,\mu)}{2}-\lambda^2\left(\frac{B_3(N,\mu)}{6}+\frac{B_1(N,\mu)B_2(N,\mu)}{4}\right)\right\}M(\phi') \\ &+ N^{4\theta-3d}\lambda\left\{1-\lambda\frac{3B_2(N,\mu)}{2}\right\}V_0(\phi') \end{aligned} \quad \text{(A.0.49)}$$

で与えられる．場 ϕ' に対する運動項 $K(\phi')$ の係数が $1+O(\lambda^2)$ になるようにするには[3]，

$$\theta = \frac{d+2}{2} \quad \text{(A.0.50)}$$

と取れば良い．この θ の値のもとでは，パラメタ (μ,λ) に対する繰り込み変換は

$$\begin{aligned} \mu' &= N^2\left\{\mu+\lambda\frac{B_1(N,\mu)}{2}-\lambda^2\left(\frac{B_3(N,\mu)}{6}+\frac{B_1(N,\mu)B_2(N,\mu)}{4}\right)\right\} \\ &+ O(\lambda^3) \end{aligned} \quad \text{(A.0.51)}$$

$$\lambda' = N^{d-4}\lambda\left\{1-\lambda\frac{3B_2(N,\mu)}{2}\right\}+O(\lambda^3) \quad \text{(A.0.52)}$$

となる．μ が小さい場合は $B_i(N,\mu)$ を μ でと展開することできる．

$$B_1(N,\mu) = B_1(N)-B_2(N)\mu+O(\mu^2) \quad \text{(A.0.53)}$$

$$B_{2,3}(N,\mu) = B_{2,3}(N)+O(\mu) \quad \text{(A.0.54)}$$

[3] $1+O(\lambda^4)$ にするには $\theta=(d+2)/2-\log(1+\lambda^2 C_3/6)/\log N^2$ と取れば良い．

ただし，

$$B_1(N) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{q_{\mathrm{out}}}\frac{1}{q^2} \tag{A.0.55}$$

$$B_n(N) = \left\{\frac{1}{(2\pi)^d}\right\}^{n-1}\int_{q_{\mathrm{out}}}\frac{1}{(q^2)^n}, \quad n=2,3 \tag{A.0.56}$$

である．ここで注意して欲しいのは，$q\in\Lambda^d_{\mathrm{out}}$ に $q^2=0$ が含まれていないので，この積分には赤外発散はなく有限値になることである．また，ϕ_{out} の積分を行うとき $\mu\geq 0$ を仮定したが，このように μ で展開する場合にはそのような条件は必要ないので，μ を展開して得られる式は任意の μ で成り立つ．μ で展開することで，最終的に得られる繰り込み群の関係式は

$$\mu' = N^2\left\{\mu + \frac{B_1(N)}{2}\lambda - \frac{B_2(N)}{2}\mu\lambda - C\lambda^2\right\} + O(\mu\lambda^2,\lambda^3) \tag{A.0.57}$$

$$\lambda' = N^{d-4}\left\{\lambda - \lambda^2\frac{3B_2(N)}{2}\right\} + O(\mu\lambda^2,\lambda^3) \tag{A.0.58}$$

となり，$c_1=B_1/2$, $c_2=B_2/2$, $c_3=C$ とすれば，本文で用いられた結果になる．ただし，$C=\frac{B_3(N)}{6}+\frac{B_1(N)B_2(N)}{4}$ である．運動量積分を実際に遂行すると，

$$B_1(N) = \Omega_{d-1}\frac{\pi^{d-2}}{(2\pi)^d}\frac{N^{d-2}-1}{(d-2)N^{d-2}} \tag{A.0.59}$$

$$B_n(N) = \Omega_{d-1}\frac{\pi^{d-2n}}{(2\pi)^{d(n-1)}}\frac{N^{d-2n}-1}{(d-2n)N^{d-2n}}, \quad (n=2,3,\cdots) \tag{A.0.60}$$

となる．ここで，Ω_{d-1} は d 次元球の表面積である．

付録 B

長方形のループを含む格子ゲージ理論の作用の連続極限

ここでは，1 × 1 の正方形のループ（プラケット）の他に 1 × 2 の長方形のループを加えた場合の格子作用の連続極限を考える．この場合の格子作用は以下で与えられる．

$$S_G = \beta \sum_{n,\mu\neq\nu} [c_0 \mathrm{tr}\ P_{\mu\nu}(n) + c_1 \mathrm{tr}\{R_{\mu\mu\nu}(n) + R_{\nu\nu\mu}(n)\}] \quad \text{(B.0.1)}$$

ここで，

$$P_{\mu\nu} = U_{n,\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U^\dagger_{n+\hat{\nu},\mu}U^\dagger_{n,\nu} \quad \text{(B.0.2)}$$

$$R_{\mu\mu\nu} = U_{n,\mu}U_{n+\hat{\mu},\mu}U_{n+2\hat{\mu},\nu}U^\dagger_{n+\hat{\mu}+\hat{\nu},\mu}U^\dagger_{n+\hat{\nu},\mu}U^\dagger_{n,\nu} \quad \text{(B.0.3)}$$

であり，$P_{\mu\nu}$ がプラケット項，$R_{\mu\mu\nu}$ が 1 × 2 の長方形 (Rectangular) に対応する項である．(図 B.1 を参照.) また，$\beta = 1/g^2$ であり，c_0，c_1 はプラケット，長方形それぞれの重みを与える係数で，ある条件を満たす必要があり，それに関しては後で議論する．

この作用の連続極限を考えるには，本文でやったように，ハウスドルフの公式を使って計算すればいいが，実際にやるとかなり面倒である．ここでは，最終結果がゲージ不変になるという事実を使って，$F_{\mu\nu}$ のなかで A_μ に関して 1 次の部分，$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$，に注目してその項を計算する．この場合は，ゲージ群が非可換な SU(N) でも可換な U(1) だと考えて計算して構わない．

$$U_{n,\mu} = e^{iagA_\mu(n+\mu/2)} \quad \text{(B.0.4)}$$

と置き，A_μ を可換量と考えると，

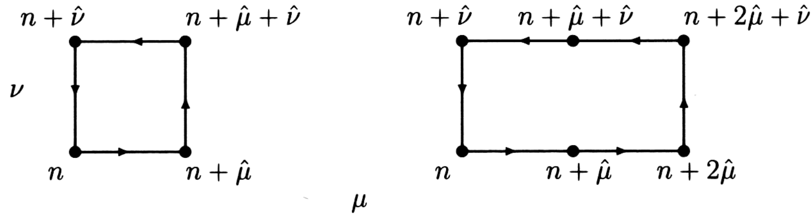


図 B.1：左：プラケット・ループ．右：1×2 の長方形ループ．

$$P_{\mu\nu}(n) = e^{ia^2 g F^L_{\mu\nu}(n_c)} \tag{B.0.5}$$

$$R_{\mu\mu\nu}(n) = e^{ia^2 g \left\{F^L_{\mu\nu}(n_c) + F^L_{\mu\nu}(n_c+\hat{\mu})\right\}} \tag{B.0.6}$$

となる．ここで，$n_c = n + \hat{\mu}/2 + \hat{\nu}/2$ であり，

$$F^L_{\mu\nu}(n) = \nabla_\mu A_\nu(n) - \nabla_\nu A_\mu(n) \tag{B.0.7}$$

$$\nabla_\mu f(n) = \frac{1}{a}\left[f(n+\hat{\mu}/2) - f(n-\hat{\mu}/2)\right] \tag{B.0.8}$$

と定義した．したがって，作用は

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{1}{g^2}\sum_{n,\mu\neq\nu}\Big[c_0 \mathrm{tr}\ \cos\left(a^2 g F^L_{\mu\nu}(n_c)\right) \\ &+ c_1\,\mathrm{tr}\ \cos\left(a^2 g \{F^L_{\mu\nu}(n_c) + F^L_{\mu\nu}(n_c+\hat{\mu})\}\right) \\ &+ c_1\,\mathrm{tr}\ \cos\left(a^2 g \{F^L_{\nu\mu}(n_c) + F^L_{\nu\mu}(n_c+\hat{\nu})\}\right)\Big] \end{aligned} \tag{B.0.9}$$

となる．$a \to 0$ の連続極限を考えると，

$$a^4 \sum_n = \int d^4x + O(a^2) \tag{B.0.10}$$

$$F^L_{\mu\nu}(n_c) = \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + O(a^2) \tag{B.0.11}$$

となる．ただし，ここでは時空 n に関しての周期的境界条件を仮定している．また，2 つめの式では $[A_\mu, A_\nu]$ などの非可換部分はないが，最終結果がゲージ不変になるべきことから，全部を計算してやれば，

$$F^L_{\mu\nu}(n_c) \to F_{\mu\nu}(x) + O(a^2) \tag{B.0.12}$$

となると考えて良い．最終的に格子作用は

$$S_G = \int d^4x \frac{c_0 + 8c_1}{2} \mathrm{tr}\ F_{\mu\nu}(x)^2 + O(a^2) \tag{B.0.13}$$

となる．したがって，連続理論の作用と一致するためには，

$$c_0 + 8c_1 \quad = \quad 1 \tag{B.0.14}$$

を満たす必要がある．

上の議論では格子作用と連続理論の作用とのずれは $O(a^2)$ であるとしたが，これは次の議論で確認できる．格子理論はゲージ不変なので，連続理論のずれもゲージ不変な演算子のはずである．有限の a ではユークリッド空間の回転対称性はないが，座標軸の入れ換えという離散的な対称性がある．ゲージ不変でかつ，座標の入れ換え対称性を満たす次元 5 の演算子は存在しないから，$O(a)$ の項をつくることはできない．したがって，連続理論からのずれは最悪でも $O(a^2)$ となる．$O(a^2)$ の項は次元 6 の演算子の 4 次元積分で与えられるが，例えば，

$$\mathrm{tr} \;\; F_{\mu\nu} F_{\nu\alpha} F_{\alpha\mu}, \quad \mathrm{tr} \;\; D^A_\mu F_{\mu\nu} D^A_\alpha F_{\alpha\nu} \tag{B.0.15}$$

などは空間対称性をもつ次元 6 の演算子であり，

$$\mathrm{tr} \;\; (D^A_\mu)^2 F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad \mathrm{tr} \;\; D^A_\mu F_{\mu\nu} D^A_\mu \; F_{\mu\nu}, \quad \mathrm{tr} \;\; (D^A_\mu)^3 (D^A_\nu) F_{\mu\nu} \tag{B.0.16}$$

などは空間対称性はないが座標の入れ換えの対称性をもつ次元 6 の演算子である．(ここでは繰り返した添字に関しては和を取っている．) ここで，SU(N) の随伴表現空間のベクトル f^A に対して随伴表現 (Adjoint Representation) の共変微分 D^A_μ は

$$D^A_\mu f^A \quad = \quad \partial_\mu f^A + ig[A_\mu, f^A] \tag{B.0.17}$$

と作用する．したがって，変換関数を $\Omega(x)$ とするゲージ変換では

$$D^A_\mu \quad \rightarrow \quad (D^A_\mu)' = \Omega(x) D^A_\mu \Omega(x)^\dagger \tag{B.0.18}$$

と変換する．

付録 C

Elitzur の定理

ここでは，（局所）ゲージ不変でない演算子の期待値はゼロになるという Elituzr の定理を SU(N) 格子ゲージ理論の場合に証明する．

ゲージ不変でない演算子として $\mathrm{Re\,tr}\ U_{n,\mu}$ を考える．もっと複雑な量を考えることもできるが証明が煩雑になるだけで本質的な違いはない．ゲージ対称性を破る外場として $J\sum_{m,\nu}\mathrm{Re\,tr}\ U_{m,\nu}$ を導入する．この時，$\mathrm{Re\,tr}\ U_{n,\mu}$ の期待値は

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{Re\,tr}\ U_{n,\mu}\rangle &= \lim_{J\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{Z(J,V)}\int\prod_{m,\nu}d\,U_{m,\nu} \\ &\times \exp[S(U)+J\sum_{m,\nu}\mathrm{Re\,tr}\ U_{m,\nu}]\ \mathrm{Re\,tr}\ U_{n,\mu} \qquad \text{(C.0.1)}\end{aligned}$$

と書ける．ここで，V は格子体積，$S(U)$ はゲージ不変な作用であり，分配関数 $Z(J,V)$ は

$$Z(J,V) = \int\prod_{m,\nu}d\,U_{m,\nu}\exp[S(U)+J\sum_{m,\nu}\mathrm{Re\,tr}\ U_{m,\nu}] \qquad \text{(C.0.2)}$$

で与えられる．格子点 n でのゲージ変換の関数 g_n を使って次の変数変換を考える．

$$\begin{aligned}U_{n,\nu} &= g_n U'_{n,\nu} \\ U_{n-\nu,\nu} &= U'_{n-\nu,\nu}g_n^{\dagger} \\ U_{m,\nu} &= U'_{m,\nu} \quad \text{if } m\neq n \text{ and } m+\nu\neq n\end{aligned}$$

$S(U)=S(U'),\ \int d\,g_n=1$ であることを使うと，

$$
\begin{aligned}
&\int\prod_{m,\nu} d\,U_{m,\nu}\exp[S(U)+J\sum_{m,\nu}\mathrm{Re\,tr}\ U_{m,\nu}]\ \mathrm{Re\,tr}\ U_{n,\mu}\\
=&\int d\,g_n\int\prod_{m,\nu} d\,U'_{m,\nu}\exp[S(U')+J\sum_{m\neq n,m+\nu\neq n}\mathrm{Re\,tr}\ U'_{m,\nu}]\\
\times&\ \mathrm{Re\,tr}\ (g_nU'_{n,\mu})\exp[J\ \mathrm{Re\,tr}\ (g_nV_n)]\\
=&\int\prod_{m,\nu} d\,U'_{m,\nu}\exp[S(U')+J\sum_{m\neq n,m+\nu\neq n}\mathrm{Re\,tr}\ U'_{m,\nu}]F(J)
\end{aligned}\qquad\text{(C.0.3)}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
F(J) &= \int d\,g_n\ \mathrm{Re\,tr}\ (g_nU'_{n,\mu})\ \exp[J\ \mathrm{tr}\ (g_nV_n)] &\text{(C.0.4)}\\
V_n &= \sum_\nu U'_{n,\nu}+(U'_{n-\nu,\nu})^\dagger &\text{(C.0.5)}
\end{aligned}
$$

である．g_n 積分を実行すれば $F(J)$ が求まるが，$J\to 0$ として強結合展開の公式を使うと

$$
F(J)\ =\ \frac{J}{N}\mathrm{Re\,tr}\ (U_{n,\mu}V_n)+\sum_{k=2}^{\infty}J^kf^{(k)}(U_\mu,V_n)\qquad\text{(C.0.6)}
$$

と評価される．したがって，

$$
\begin{aligned}
\langle\mathrm{Retr}\ U_{n,\mu}\rangle=&\lim_{J\to 0}\lim_{V\to\infty}\frac{1}{Z(J,V)}\int\prod_{m,\nu}d\,U'_{m,\nu}\exp[S(U')+J\sum_{m\neq n,m+\nu\neq n}\mathrm{Retr}\ U'_{m,\nu}]\\
&\times\left[\frac{J}{N}\mathrm{Retr}\ (U_{n,\mu}V_n)+\sum_{k=2}^{\infty}J^kf^{(k)}(U_\mu,V_n)\right]
\end{aligned}\qquad\text{(C.0.7)}
$$

となる．$U_{n,\mu}$ や V_n の任意の関数 $f(U_{n,\mu},V_n)$ は高々$2d$ (d は格子空間の次元）個のリンク変数しか含まないので，すべての J に対して

$$
\begin{aligned}
&\lim_{V\to\infty}\frac{1}{Z(J,V)}\int\prod_{m,\nu}d\,U'_{m,\nu}\exp[S(U')+J\sum_{m\neq n,m+\nu\neq n}\mathrm{Re\,tr}\ U'_{m,\nu}]\\
\times&\ f(U_{n,\mu},V_n)<\infty
\end{aligned}\qquad\text{(C.0.8)}
$$

が言える．したがって，$F(J)$ の展開係数 $f^{(k)}$ などの積分は無限体積の極限でも有限になることがわかる．そこで，$F(J)$ の展開係数の無限体積での極

限値を c_k と書くとすると，

$$\langle \mathrm{Re\,tr}\ U_{n,\mu} \rangle \quad \propto \quad \lim_{J\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} c_k J^k = 0 \tag{C.0.9}$$

となり，Elitzur の定理が証明されたことになる．定義から $c_1 = \dfrac{\mathrm{Re\,tr}\ (U_{n,\mu}V_n)}{N}$ である．

付録 D

ウィルソン・フェルミオンによるカイラル・アノマリーの計算

格子理論の摂動展開でカイラル・アノマリーを計算しよう．ここではウィルソン・フェルミオンを用いて計算を行う．

カイラル・アノマリーはウォード高橋恒等式の破れとして現われる．そこでまず，ウィルソン・フェルミオンに対するウォード高橋恒等式を導こう．格子フェルミオン作用は

$$\begin{aligned} S_F(\psi,\bar\psi) &= \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\left[\bar\psi_n\gamma_\mu U_{n,\mu}\psi_{n+\hat\mu} - \bar\psi_{n+\hat\mu}\gamma_\mu U^\dagger_{n,\mu}\psi_n\right] + M\sum_n \bar\psi_n\psi_n \\ &- \frac{r}{2}\sum_{n,\mu}\left[\bar\psi_n U_{n,\mu}\psi_{n+\hat\mu} + \bar\psi_{n+\hat\mu}U^\dagger_{n,\mu}\psi_n - 2\bar\psi_n\psi_n\right] \end{aligned} \tag{D.0.1}$$

である．格子点 n に依存したカイラル変換を

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = e^{i\theta^a_n T^a\gamma_5}\psi \\ \bar\psi &\rightarrow \bar\psi' = \bar\psi e^{i\theta^a_n T^a\gamma_5} \end{aligned} \tag{D.0.2}$$

とする．ここで，T^a は群 $\mathrm{U(N}_f)$ の生成子，θ^a_n は対応する変換パラメタである．この変換に対する作用の変化分を θ^a の 1 次までで考えると，

$$\theta^a_n\delta^a_n S_F(\psi,\bar\psi) = i\theta^a_n\left[-\nabla^-_\mu J^a_{\mu,5}(n) + 2mP^a(n) - X^a_5(n)\right] \tag{D.0.3}$$

となる．ここで，

$$J^a_{\mu,5}(n) = \frac{1}{2}\left\{\bar{\psi}_n\gamma_\mu\gamma_5 U_{n,\hat{\mu}} T^a \psi_{n+\hat{\mu}} + \bar{\psi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu\gamma_5 U^\dagger_{n,\hat{\mu}} T^a \psi_n\right\} \tag{D.0.4}$$

$$P^a(n) = \bar{\psi}_n\gamma_5 T^a\psi_n \tag{D.0.5}$$

$$\begin{aligned} X^a_5(n) &= \frac{r}{2}\left[\bar{\psi}_n\gamma_5 T^a\left\{U_{n,\mu}\psi_{n+\hat{\mu}} + U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\psi_{n-\hat{\mu}}\right\}\right. \\ &+ \left.\left\{\bar{\psi}_{n+\hat{\mu}} U^\dagger_{n,\mu} + \bar{\psi}_{n-\hat{\mu}} U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu}\right\}\gamma_5 T^a\psi_n - 4\bar{\psi}_n\gamma_5 T^a\psi_n\right] \end{aligned} \tag{D.0.6}$$

であり，∇^-_μ は $\nabla^-_\mu f(n) = f(n) - f(n-\hat{\mu})$ で定義される後方差分である．

フェルミオンを含む物理量 $O(\psi,\bar{\psi})$ の期待値を考える．$\psi,\bar{\psi}$ の代わりに式(D.0.2) で与えられる $\psi',\bar{\psi}'$ を使って期待値を書き表すと，

$$\langle O\rangle = \int \mathcal{D}\psi'\mathcal{D}\bar{\psi}' e^{S_F(\psi',\bar{\psi}')} O(\psi',\bar{\psi}') \tag{D.0.7}$$

である．簡単のためにフェルミオン以外の変数の積分は省略してある．これを $\psi,\bar{\psi}$ を使って書き直すと，

$$\begin{aligned} &\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} e^{S_F+\theta^a_n\delta^a_n S_F}\left\{O + \theta^a_n\delta^a_n O\right\} \\ &= \langle O\rangle + \theta^a_n\langle\{\delta^a_n O + O\delta^a_n S_F\}\rangle \end{aligned} \tag{D.0.8}$$

となる．ここでは，変換のヤコビアンが1であることを使っている．また，引数の $\psi,\bar{\psi}$ は省略しており，

$$O(\psi',\bar{\psi}') - O(\psi,\bar{\psi}) \equiv \theta^a_n\delta^a_n O + O(\theta^2) \tag{D.0.9}$$

である．θ^a_n の前の係数が0という条件より，ウィルソン・フェルミオンに対するウォード高橋恒等式は

$$\langle\left[\nabla^-_\mu J^a_{\mu,5}(n) - 2mP^a(n) + X^a_5(n)\right] O + i\delta^a_n O\rangle = 0 \tag{D.0.10}$$

となる．連続理論の場合と比べると X^a_μ の項が余計なので，この項からカイラル・アノマリーが現れるはずである．

さて，アノマリーを実際に計算してみよう．X^a_5 の中のリンク変数 $U_{n,\mu}$ を展開して運動量空間に移行すると

$$X^a_5(s) = \bar{\psi}(-q)\gamma_5 T^a V_5(pa,qa)\psi(p)\delta(s+p-q) + \cdots \tag{D.0.11}$$

$$V_5(p,q) = r\sum_\mu\left[c_\mu(p) + c_\mu(q) - 2\right] \tag{D.0.12}$$

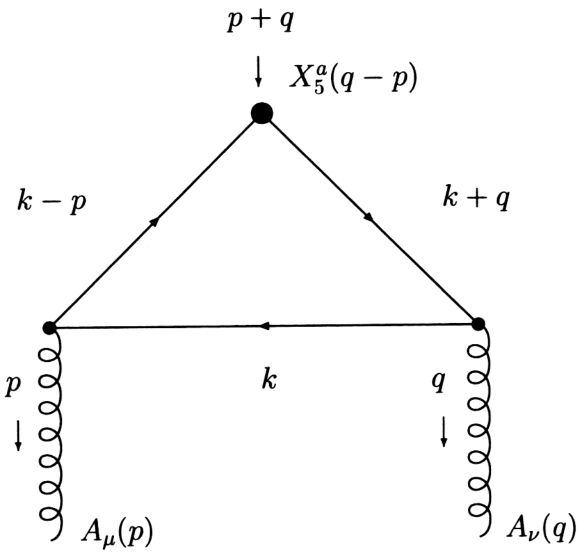


図 D.1：カイラル・アノマリーに寄与する三角形ダイアグラム.

となる．ここで，$c_\mu(p) = \cos p_\mu$ であり，$\cdots$ はゲージ場の 1 次以上の項を表すが，アノマリーの計算には寄与しない．また，作用に現れるフェルミオンとゲージ場の相互作用は

$$\bar{\psi}(-q)\left[agA_\mu(k)V_\mu(qa+pa)\delta(q-p-k)+\cdots\right]\psi(p) \tag{D.0.13}$$

$$V_\mu(p) = i\left\{-\gamma_\mu c_\mu(\frac{q+p}{2}) + irs_\mu(\frac{q+p}{2})\right\} \tag{D.0.14}$$

で与えられる．ここで，A_μ はゲージ場であり，$s_\mu(p) = \sin p_\mu$ と置いている．

アノマリーが存在するのはカイラル U(1) 変換の場合なので，以下では $a = 0$，つまり，T^a が単位行列，の時を考える．摂動展開でアノマリーに寄与するのは図 D に挙げた三角形ダイアグラム (Triangle diagram) である．

この項の寄与は

$$\Gamma(-q-p) = -g^2\Gamma_{\mu,\nu}(pa,qa)\mathrm{tr}\ A_\mu(p)A_\nu(q) \tag{D.0.15}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu,\nu}(pa,qa) = a^2\int_k V_5(ka+qa,ka-pa)\mathrm{tr}\ &[\gamma_5 S_F(ka-pa)V_\mu(2ka-pa)\\ &\times S_F(ka)V_\nu(2ka+q)S_F(ka+qa)],\end{aligned} \tag{D.0.16}$$

と書ける．ここで，運動量の積分は

$$\int_k \equiv \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4k}{(2\pi)^4}$$

と略記している．また，$S_F(p)$ はフェルミオン伝搬関数で，

$$S_F(p) = \frac{1}{i\not{s}(p) + M(p)} = \frac{-i\not{s}(p) + M(p)}{s^2(p) + M(p)^2} \qquad \text{(D.0.17)}$$

で与えられ，$\not{s}(p) = \sum_\mu \gamma_\mu s_\mu(p)$, $M(p) = ma + r\sum_\mu(1 - c_\mu(p))$ である．ここで，積分変数を $k \to ka$ と無次元にすると，

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu,\nu}(pa,qa) &= a^{-2}\int_k V_5(k+qa,k-pa)\mathrm{tr}\,[\gamma_5 S_F(k-pa)V_\mu(2k-pa)S_F(k) \\ &\times V_\nu(2k+q)S_F(k+qa)]\end{aligned} \qquad \text{(D.0.18)}$$

となるので，この積分は $a \to 0$ の極限で見掛け上 a^{-2} で発散している．ここでは

$$\int_k = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \qquad \text{(D.0.19)}$$

と略記している．外線の運動量で展開すると，a の次数が増えていくので，

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mu,\nu}(pa,qa) =& \Gamma_{\mu,\nu}(0,0) + a\left(p_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + q_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)\Gamma_{\mu,\nu}(x,y)\Big|_{x=y=0} \\ &+ \frac{a^2}{2}\left(p_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + q_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)\left(p_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta} + q_\beta\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)\Gamma_{\mu,\nu}(x,y)\Big|_{x=y=0} \\ &+ \Bigg[\Gamma_{\mu,\nu}(pa,qa) - \Bigg[1 + a\left(p_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + q_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right) \\ &+ \frac{a^2}{2}\left(p_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + q_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)\left(p_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta} + q_\beta\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)\Bigg]\Gamma_{\mu,\nu}(x,y)\Big|_{x=y=0}\Bigg]\end{aligned}$$

(D.0.20)

となる．発散する項がすべて差し引かれている最後の項は $a \to 0$ で有限なので，被積分関数の段階で (積分変数を次元を持った変数 k に戻して) $a \to 0$ としてよい．ところがその極限ではその寄与は $O(a)$ となって消えることが分かる．(これは X_5 という項が $O(a)$ であることに対応している．) したがって，初めの 3 項だけを評価すればよい．スピノルのトレースの中に γ_5 があ

るので，この 3 つの項は 4 次元完全反対称テンソル ϵ に比例している．ϵ は 4 階のテンソルなので，2 階のテンソル $\Gamma_{\mu\nu}$ に寄与するには p,q とその 2 つの足が縮約されなければならない．したがって，初めの 2 項の寄与はゼロである．また，$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha p_\beta = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}q_\alpha q_\beta = 0$ だから，結局，ゼロでないのは，

$$\Gamma_{\mu,\nu}(pa,qa) \quad = \quad a^2 p_\alpha q_\beta \, \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial y_\beta}\Gamma_{\mu,\nu}(x,y)\bigg|_{x=y=0} \tag{D.0.21}$$

である．微分の計算は少し面倒であるが，以下のことに注意すると計算が簡単になる．

1. 頂点部分の V_5 や V_μ などに微分が作用した場合は γ_5 を含んだトレースの性質から，その寄与はゼロになる．
2. 伝搬関数の微分は次のように変形できる．

$$\frac{\partial S_F(k-p)}{\partial p_\alpha}\bigg|_{p=0} \quad = \quad -S_F(k)V_\alpha(k)S_F(k) \tag{D.0.22}$$

$$\frac{\partial S_F(k+q)}{\partial q_\alpha}\bigg|_{q=0} \quad = \quad S_F(k)V_\alpha(k)S_F(k) \tag{D.0.23}$$

この 2 つの性質を使うと，

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu,\nu}(pa,qa) \quad &= \quad p_\alpha q_\beta \int_k 2M(k)\mathrm{tr}\ [\gamma_5 S_F(k)V_\alpha(k)S_F(k)V_\mu(k) \\
&\times \quad S_F(k)V_\nu(k)S_F(k)V_\beta(k)S_F(k)] \\
&= \quad 8\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta \int_k M(k)c_\mu(k)c_\nu(k)c_\alpha(k) \\
&\times \quad \frac{M(k)c_\beta(k) - 4rs_\beta^2(k)}{\left(s^2(k)+M^2(k)\right)^3}
\end{aligned} \tag{D.0.24}$$

となる．後述するように以下の運動量積分 (k 積分) は実行できて

$$I \quad = \quad \int_k M(k)c_\mu(k)c_\nu(k)c_\alpha(k)\frac{M(k)c_\beta(k) - 4rs_\beta^2(k)}{\left(s^2(k)+M^2(k)\right)^3} = -\frac{1}{32\pi^2} \tag{D.0.25}$$

となる．この値を代入すると X_5^0 の期待値は座標空間で

$$\langle X_5^0 \rangle \quad = \quad \frac{g^2 \mathrm{N}_f}{4\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{tr}\ [\partial_\mu A_\nu(x)\partial_\alpha A_\beta(x)] \tag{D.0.26}$$

となる．ゲージ群が $SU(N_c)$ の場合この結果はゲージ不変ではないが，A_μ の 3 次の項を計算して足し合わせると全体はゲージ不変になり，

$$\langle X_5^0 \rangle \;=\; 2N_f \frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{tr}\;[F_{\mu\nu}(x)F_{\alpha\beta}(x)] \tag{D.0.27}$$

と良く知られたアノマリーを再現する．そしてウォード高橋恒等式は

$$\langle\left[\partial_\mu J^a_{\mu,5}(x) - 2mP^a(x) + 2N_f\frac{g^2}{32\pi^2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\mathrm{tr}\;[F_{\mu\nu}(x)F_{\alpha\beta}(x)]\right]O + i\delta^a_n O\rangle \\ = \;0 \tag{D.0.28}$$

となる．

最後に k 積分の計算方法の詳細を紹介しよう．以下では積分変数 k は必要のない限り省略する．まず，次の恒等式

$$M^2\prod_{\mu=1}^{4}c_\mu - M\sum_{\mu=1}^{4}s_\mu^2\prod_{\nu\neq\mu}c_\nu \;=\; \left[s^2+M^2\right]\prod_{\mu=1}^{4}c_\mu \\ +\;\frac{1}{4}\left[s^2+M^2\right]^3\prod_\mu c_\mu\sum_\nu\frac{s_\nu}{c_\nu}\frac{\partial}{\partial k_\nu}\left[s^2+M^2\right]^{-2} \tag{D.0.29}$$

を用いて積分関数を

$$I \;=\; \int_k\prod_\mu c_\mu\left[\frac{1}{(s^2+M^2)^2}+\frac{1}{4}\sum_\nu\frac{s_\nu}{c_\nu}\frac{\partial}{\partial k_\nu}\frac{1}{(s^2+M^2)^2}\right] \tag{D.0.30}$$

と変形する．ここで積分変数を k_μ から $s_\mu = \sin k_\mu$ へと変数変換する．この時，

$$\int_{-\pi}^{\pi}c_\mu dk_\mu = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}c_\mu dk_\mu + \int_{\pi/2}^{3\pi/2}c_\mu dk_\mu = \int_{-1}^{1}ds_\mu - \int_{-1}^{1}ds'_\mu \tag{D.0.31}$$

となるから，(ここで，$s'_\mu(k) = s_\mu(k-\pi)$ であり，以下では $'$ は省略する.)

$$I = \sum_{\epsilon_\mu=\pm}\prod_\mu \epsilon_\mu \int_{-1}^{1} \frac{d^4 s}{(2\pi)^4}\left[1+\frac{1}{4}\sum_\nu s_\nu \frac{\partial}{\partial s_\nu}\right]$$

$$\times \left[s^2 + \underbrace{r^2\left[\sum_\mu \{1-\epsilon_\mu(1-s_\mu^2)^{1/2}\}\right]^2}_{M_\epsilon^2}\right]^{-2}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{\epsilon_\mu=\pm}\prod_\mu \epsilon_\mu \int_{-1}^{1}\frac{d^4 s}{(2\pi)^4}(s^2)^{-2} s\cdot\frac{\partial}{\partial s}\frac{(s^2)^2}{[s^2+M_\epsilon^2]^2} \quad \text{(D.0.32)}$$

と書き換えられる．(赤外発散がないので，$a \to 0$ で $ma \to 0$ として良い.) ここで，$s^2 = \sum_\nu s_\nu^2$ であり，最後の変形では

$$s\cdot\frac{\partial}{\partial s} = \sum_\nu s_\nu \frac{\partial}{\partial s_\nu} \quad \text{(D.0.33)}$$

であることを用いた．また，ϵ_μ は $-\pi/2 < k_\mu < \pi/2$ と $\pi/2 < k_\mu < 3\pi/2$ のそれぞれに対応した積分や c_μ の符号を表している．$\epsilon_\mu = -1$ となる μ が 1 つでもあるものが格子フェルミオンのダブラーである．

積分を球座標に変換する．ただし積分領域が 4 次元球ではなく，1 辺が 2 の 4 次元超立方体であるので，角度座標を固定した場合の球座標の動径の長さの最大値はある μ に対して $s_\mu = \pm 1$ で，かつ，他の $|s_\nu| < 1$ ($\nu \neq \mu$) になっている場合なので，$s^2_{\mathbf{max},\mu} = 1 + \sum_{\nu\neq\mu} s_\nu^2$ で与えられる．角度座標を決めると対応する μ が決まり，したがって

$$\int_{-1}^{1} d^4 s = \sum_\mu \int_\mu d\Omega_4 \int_0^{s_{\mathbf{max},\mu}} s^3 ds \quad \text{(D.0.34)}$$

と書ける．ここで，$d\Omega_4$ は 4 次元球面の面積要素であり，$\int_\mu$ の添字 μ は角度の積分領域が $s_\mu = \pm 1$，$|s_\nu| < 1$ ($\nu \neq \mu$) を満たす範囲に制限されていることを示している．この変数変換による書き換えを使うと，

$$
\begin{aligned}
I=&\frac{1}{4(2\pi)^4}\sum_{\epsilon_\nu=\pm}\prod_\nu \epsilon_\nu \sum_\mu \int_\mu d\Omega_4 \int_0^{s_{\max,\mu}} ds \frac{\partial}{\partial s}\frac{s^4}{(s^2+M_\epsilon^2)^2} \\
=&\frac{\sum_\mu}{4(2\pi)^4}\int_\mu d\Omega_4 \sum_{\epsilon_\nu=\pm}\prod_\nu \epsilon_\nu \\
&\times\left[\underbrace{\frac{s_{\max,\mu}^4}{\left(s_{\max,\mu}^2+r^2\left\{4+\sum_{\nu\neq\mu}\epsilon_\nu(1-s_\nu^2)^{1/2}\right\}\right)^2}}_{F_\mu}-lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^4}{[\delta^2+(r\sum_\nu(1-\epsilon_\nu))^2]^2}\right] \\
=&\frac{\sum_\mu}{4(2\pi)^4}\int_\mu d\Omega_4\left[\sum_{\epsilon_\nu=\pm}\quad\prod_{\nu\neq\mu}\epsilon_\nu F_\mu \sum_{\epsilon_\mu=\pm 1}\epsilon_\mu - 1\right] \\
=&-\frac{1}{4(2\pi)^4}\int d\Omega_4 = -\frac{1}{32\pi^2}
\end{aligned}
\tag{D.0.35}
$$

とアノーマリーの計算で使った結果を得る．1行目の積分を実行して2行目に移る時、積分領域の下端 $s=0$ を $s=\delta$ として $\delta\to 0$ の極限を評価するようにした．その結果あらわれた2番目の項の極限はダブラーに対して0になっている．また，ここでは F_μ が ϵ_μ に依っていないので，$\sum_{\epsilon_\mu=\pm 1}\epsilon_\mu=0$ となり第1項はゼロになることを使っている．以上で k 積分の計算の詳細を終了する．

付録 E

$N \to \infty$ でのSU(N)積分

ここでは，強結合極限の有効作用を計算するときに必要な SU(N) 積分を $N \to \infty$ の極限で求める．強結合極限での中間子の有効作用は

$$Z(J) = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp[N \sum_n \mathrm{tr}\ (\hat{M} + J) M(n)] \prod_{n,\mu} Z_{n,\mu} \qquad \text{(E.0.1)}$$

と書ける．ここで，1 リンク積分 $Z_{n,\mu}$ は

$$Z_{n,\mu} = \int dU_{n,\mu} \exp[\mathrm{Tr}\ (U_{n,\mu} D^\dagger_{n,\mu} + D_{n,\mu} U^\dagger_{n,\mu})] \qquad \text{(E.0.2)}$$

と定義され，また，

$$\begin{aligned}
(D_{n,\mu})_{ab} &= -\sum_f a^3 (\bar{\psi}^f_{n+\hat{\mu}})_b P^+_\mu (\psi^f_n)_a \\
(D^\dagger_{n,\mu})_{ab} &= -\sum_f a^3 (\bar{\psi}^f_n)_b P^-_\mu (\psi^f_{n+\hat{\mu}})_a
\end{aligned}$$

である．簡単のために以下では添字 (n, μ) は省略する．

$U^\dagger U = 1$ という条件を使うと，

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial D_{ab} \partial D^\dagger_{bc}} = \delta_{ca} \qquad \text{(E.0.3)}$$

という Schwinger-Dyson 方程式が得られる．Z はゲージ不変なので，以下のゲージ不変量のみの関数である．

$$\begin{aligned}
\lambda_q &= Tr \Lambda^q, \quad q = 1, 2, \cdots \qquad \text{(E.0.4)} \\
\Lambda_{ab} &= \frac{1}{N^2} (D^\dagger D)_{ab}.
\end{aligned}$$

式（E.0.3）に $Z \equiv \exp(NW)$ を代入すると

$$\begin{aligned}\Lambda &= \sum_{q=1}^{\infty} q \frac{\partial W}{\partial \lambda_q}\left[\Lambda^q + \frac{1}{N}\sum_{p=1}^{q-1}\Lambda^{q-p}\lambda_p\right] \\ &+ \sum_{q,t=1}^{\infty} qt\left[\frac{1}{N}\frac{\partial^2 W}{\partial\lambda_q\partial\lambda_t} + \frac{\partial W}{\partial\lambda_q}\frac{\partial W}{\partial\lambda_t}\right]\Lambda^{q+t} \qquad \text{(E.0.5)}\end{aligned}$$

が得られる．$N \to \infty$ の極限を取ると方程式は

$$\Lambda = \sum_{q=1}^{\infty} q\frac{\partial W}{\partial\lambda_q}\Lambda^q + \sum_{q,t=1}^{\infty} qt\frac{\partial W}{\partial\lambda_q}\frac{\partial W}{\partial\lambda_t}\Lambda^{q+t} \qquad \text{(E.0.6)}$$

と簡単になる．この方程式の解として

$$W = \sum_q a_q \mathrm{tr}\ \Lambda^q = \sum_q a_q\lambda_q \qquad \text{(E.0.7)}$$

と仮定すると，

$$\frac{\partial W}{\partial \Lambda} = \sum_q q\frac{\partial W}{\partial\lambda_q}\frac{\partial\lambda_q}{\partial\Lambda} = \sum_q q\frac{\partial W}{\partial\lambda_q}\Lambda^{q-1} \qquad \text{(E.0.8)}$$

などとなるので，方程式 (E.0.6) は

$$\Lambda = \Lambda\frac{\partial W}{\partial\Lambda} + \Lambda\frac{\partial W}{\partial\Lambda}\Lambda\frac{\partial W}{\partial\Lambda} \qquad \text{(E.0.9)}$$

と変形される．$W(\Lambda = 0) = 0$ という境界条件でこの方程式を解くと，その解は

$$W(\Lambda) = \mathrm{Tr}\left[(1+4\Lambda)^{1/2} - 1 - \ln\left[\frac{1+(1+4\Lambda)^{1/2}}{2}\right]\right] \qquad \text{(E.0.10)}$$

となる．この解が式（E.0.9）を満たすことは代入すれば容易に確かめることができる．

付録 F

格子Gross-Neveu模型の解析

ここでは，QCD と良く似た性質を持つ Gross-Neveu 模型を考えることにする．この模型はフェルミオン数 N が無限大の極限で厳密に解ける．ここでの目的は，格子上のウィルソン・フェルミオンに現れるパリティを破る相転移をこの模型を用いて解析的に議論することである．

連続理論の Gross-Neveu 模型は 2 次元の 4 体フェルミ相互作用をする模型で，その作用は

$$S = -\int d^2x \left\{ \bar{\psi}(i\gamma\cdot\partial - m)\psi + \frac{g^2}{2N}\left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\psi)^2\right] \right\} \quad \text{(F.0.1)}$$

で与えられる．ここで，ψ は N 成分のディラック・フェルミオン $\psi_k(k = 1, 2, \cdots, N)$ であり，

$$\bar{\psi}\psi = \sum_{k=1}^{N} \bar{\psi}_k\psi_k \quad \text{(F.0.2)}$$

という省略した記号法を使っている．この作用は $m = 0$ の時，カイラル変換に対して不変である．この模型は $N \to \infty$ の極限で解くことができ，カイラル対称性が自発的に破れる，漸近的自由性がある，など QCD と良く似た性質を持っている．

格子上での作用は

$$
\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{2}\sum_{n,\mu}\bar{\psi}_n\gamma_\mu\{\psi_{n+\hat{\mu}}-\psi_{n-\hat{\mu}}\}+\sum_n M\bar{\psi}_n\psi_n \\
&- \frac{r}{2}\sum_{n,\mu}\bar{\psi}_n\{\psi_{n+\hat{\mu}}+\psi_{n-\hat{\mu}}-2\psi_n\} \\
&- \frac{g^2}{2N}\sum_n\left[(\bar{\psi}_n\psi_n)^2+(\bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_n)^2\right] \qquad \text{(F.0.3)}
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここでは $\psi_n = a^{1/2}\psi(x)$, $M = ma$ などすべて無次元化してある．また，ダブラーを取り除くためにウィルソン項を導入した．(以下では簡単のために $r=1$ と取る．) この理論の分配関数は

$$
Z = \int\prod_n(d\psi_n d\bar{\psi}_n)e^{-S_0} \qquad \text{(F.0.4)}
$$

と計算されるが，以下のように補助場のガウス積分を導入することで (定数倍を除いて) 分配関数の表式を書き換えることができる．

$$
\begin{aligned}
Z=&\int\prod_n(d\sigma_n d\pi_n)\exp\left[-\frac{N}{2g^2}\left\{(\sigma_n+\frac{g^2}{N}\bar{\psi}_n\psi_n)^2+(\pi_n+\frac{g^2}{N}\bar{\psi}_n i\gamma_5\psi_n)^2\right\}\right] \\
&\times\int\prod_n(d\psi_n d\bar{\psi}_n)e^{-S_0}=\int\prod(d\sigma_n d\pi_n d\psi_n d\bar{\psi}_n)e^{-S} \qquad \text{(F.0.5)}
\end{aligned}
$$

ここで，新しい作用は

$$
\begin{aligned}
S &= -\sum_{n,\mu}\bar{\psi}_n\left\{P_{-\mu}\psi_{n+\hat{\mu}}+P_{+\mu}\psi_{n-\hat{\mu}}\right\}+(M+2)\sum_n\bar{\psi}_n\psi_n \\
&+ \sum_n\bar{\psi}_n\left\{\sigma_n+i\gamma_5\right\}\psi_n+\frac{N}{2g^2}\sum_n(\sigma_n^2+\pi_n^2) \qquad \text{(F.0.6)}
\end{aligned}
$$

となる．ただし，$P_{\pm\mu}=(1\pm\gamma_\mu)/2$ である．補助場を導入することで 4 体フェルミ相互作用がなくなり，フェルミオン積分が実行できる形になった．N 成分あることに注意して積分を実行すると，

$$
Z = \int\prod_n(d\sigma_n d\pi_n)e^{-NS_{\text{eff}}(\sigma,\pi)} \qquad \text{(F.0.7)}
$$

$$
S_{\text{eff}}(\sigma,\pi) = \frac{1}{2g^2}\sum_n(\sigma_n^2+\pi_n^2)-\text{Tr }\log D \qquad \text{(F.0.8)}
$$

となる．ここで，

$$D_{n,m} = (M + 2 + \sigma_n + i\gamma_5\pi_n)\delta_{n,m} - P_{-\mu}\delta_{m,n+\hat{\mu}} - P_{+\mu}\delta_{m,n-\hat{\mu}} \quad \text{(F.0.9)}$$

である．$N \to \infty$ の極限で分配関数 Z は S_{eff} の鞍点 (saddle point) で与えられる．つまり，

$$\frac{\delta S_{\text{eff}}(\sigma,\pi)}{\delta\sigma_n} = \frac{\delta S_{\text{eff}}(\sigma,\pi)}{\delta\pi_n} = 0 \quad \text{(F.0.10)}$$

という鞍点条件を満たす解を $\bar{\sigma}_n, \bar{\pi}_n$ と書くと

$$Z = e^{-S_{\text{eff}}(\bar{\sigma},\bar{\pi})} \quad \text{(F.0.11)}$$

となるわけである．$\bar{\sigma}_n, \bar{\pi}_n$ の平行移動不変性を仮定して $\bar{\sigma}_n = \sigma_0$, $\bar{\pi}_n = \pi_0$（n に依存しない）とすると

$$S_{\text{eff}}(\sigma,\pi) = VV_{\text{eff}}(\sigma_0,\pi_0) \quad \text{(F.0.12)}$$

$$V_{\text{eff}}(\sigma_0,\pi_0) = \frac{1}{2g^2}(\sigma_0^2 + \pi_0^2) - \frac{1}{V}\text{Tr}\ \log D \quad \text{(F.0.13)}$$

となる．ここで，$V = \sum_n 1$ は 2 次元の格子点の数である．$\text{Tr}\ \log D$ は以下のように評価される．

$$\begin{aligned}
\text{Tr}\ \log D &= \sum_n \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} e^{-ikn}\{\text{tr}\ \log D\}\, e^{ikn} \\
&= \sum_n \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \text{tr}\ \log\left[M + \sigma_0 + i\gamma_5\pi_0 + \sum_\mu (1 - \cos k_\mu) + i\not{s}\right] \\
&= V \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \log\left[\left\{M + \sigma_0 + \sum_\mu (1 - \cos k_\mu)\right\}^2 + \pi_0^2 + s^2\right]
\end{aligned} \quad \text{(F.0.14)}$$

ここで，$\not{s} = \sum_\mu \gamma_\mu s_\mu$, $s^2 = \sum_\mu s_\mu^2$, $s_\mu = \sin k_\mu$ である．したがって，鞍点条件は

$$\frac{\delta V_{\text{eff}}}{\delta\sigma_0} = \frac{\sigma_0}{g^2} - 2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{M + \sigma_0 + W(k)}{\{M + \sigma_0 + W(k)\}^2 + \pi_0^2 + s^2} = 0 \quad \text{(F.0.15)}$$

$$\frac{\delta V_{\text{eff}}}{\delta\pi_0} = \frac{\pi_0}{g^2} - 2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{\pi_0}{\{M + \sigma_0 + W(k)\}^2 + \pi_0^2 + s^2} = 0 \quad \text{(F.0.16)}$$

で与えられる．ここで $W(k) = \sum_\mu (1 - \cos k_\mu)$ とおいた．第 2 式から $\pi_0 = 0$

は常に解になるが，M の値によっては $\pi_0 \neq 0$ となる解も存在する．この時，第 2 式より，

$$\frac{1}{g^2} = 2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{(M+\sigma_0+W(k))^2+\pi_0^2+s^2} \tag{F.0.17}$$

となるので，$\pm\pi_0$ の両方が解となる．$V_{\rm eff}$ を比べると $\pi_0 \neq 0$ の方がその値が小さいので $N \to \infty$ では $\pi_0 \neq 0$ が真の解になる．$\pm\pi_0$ はお互いにパリティ変換で移り変わるので，$\pi_0 \neq 0$ はパリティ対称性の自発的破れを意味する．

積分変数 k_μ を $k_\mu \to \pi - k_\mu$ と変換すると $W(k) \to -W(k)+4$, $s^2 \to s^2$ となるので，2 つの方程式から，

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_0}{g^2} &= 2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{M+\sigma_0+W(k)}{\{M+\sigma_0+W(k)\}^2+\pi_0^2+s^2}\\ &= -2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{\tilde{M}-\sigma_0+W(k)}{\left\{\tilde{M}-\sigma_0+W(k)\right\}^2+\pi_0^2+s^2}\end{aligned} \tag{F.0.18}$$

$$\frac{\pi_0}{g^2} = 2\pi_0\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{\left\{\tilde{M}-\sigma_0+W(k)\right\}^2+\pi_0^2+s^2} \tag{F.0.19}$$

が言える．ここで，$\tilde{M} = -(M+4)$ である．したがって，(M, g^2) を決めた時の解が (σ_0, π_0) とすると $(\tilde{M}, g^2)$ での解は $(-\sigma_0, \pi_0)$ であることがわかる．

M の値を変えると $\pi_0 = 0$ から $\pi_0 \neq 0$ に連続的に変化していくが，その境になる M を M_c とすると次の方程式から決定できる．

$$\frac{M_c}{g^2} = -2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{W(k)}{(\sigma_M+W(k))^2+s^2} \tag{F.0.20}$$

$$\frac{1}{g^2} = 2\int\frac{d^2k}{(2\pi)^2}\frac{1}{(\sigma_M+W(k))^2+s^2} \tag{F.0.21}$$

ここで，$\sigma_M = \sigma_0 + M_c$ である．M_c の値を g^2 の関数として $M-g^2$ 平面に書くと，格子 Gross-Neveu 模型の相構造が決定される．QCD の場合と同じように M_c で 2 次相転移が起こり，パリティ対称性が自発的に破れる相が存在する．(M, g^2) の解が (σ_0, π_0)，$(\tilde{M}, g^2)$ の解が $(-\sigma_0, \pi_0)$ であることを使うと，(M_c, g^2) が相転移点あれば $(-M_c-4, g^2)$ も相転移点となることがわかる．したがって相構造は $M=-2$ を中心に左右対称である．g^2 が大きい場合はパリティの破れた相は 1 つしかないが，g^2 が小さくなり連続極限に近づいてい

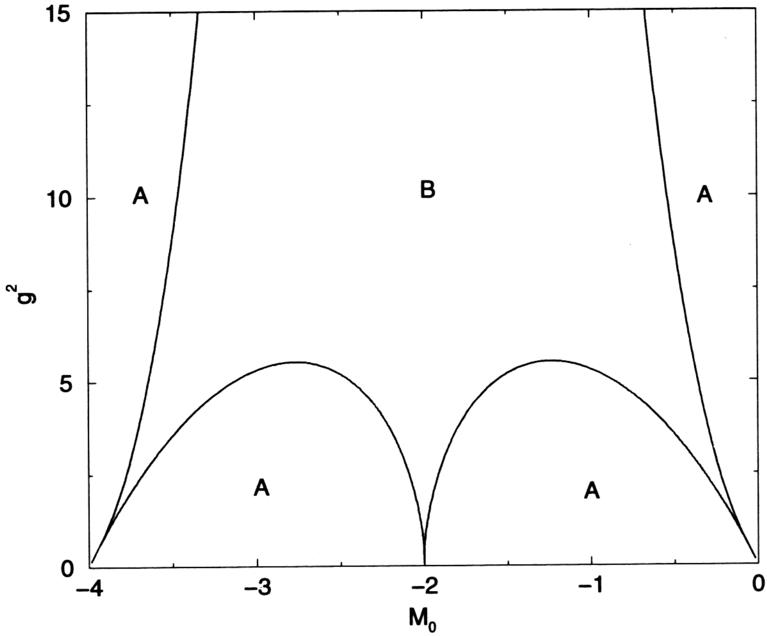


図 F.1：格子 Gorss-Neveu の相構造．$g^2 - M_0$ 平面に M_c を描いた．A の領域では $\pi_0 = 0$ であるが，B の領域では $\pi_0 \neq 0$ となり，パリティが自発的に破れる．本文で述べたように相構造は $M_0 = -2$ の線に対して対称である．g^2 が大きい時は M_c は 2 本だが，g^2 が小さくなると M_c は 6 本になる．$M_0 = 0$ は物理的な粒子 ($k \simeq (0,0)$) の連続極限であり，$M_0 = -2$ や $M_0 = -4$ は $k \simeq (\pi/a, 0), (0, \pi/a)$ や $k \simeq (\pi/a, \pi/a)$ のそれぞれのダブラーに対応した連続極限である．

くと，$k = (0,0)$, $k = (\pi, 0)$ あるいは $(0, \pi)$, $k = (\pi, \pi)$ のそれぞれに対応して 3 つの領域でパリティの破れた相が現れる．その様子を見るために $g^2 \to 0$ を考える．この時，式 (F.0.21) の左辺が発散するので，右辺の積分が発散するために分母がゼロになる必要がある．これから，$s^2 \simeq (\sigma_M + W(k))^2 \simeq 0$ という条件がでる．連続極限では $\sigma_M \simeq M$ なので，2 番目の条件をを満たす M は $M_c = -W(k)$ で与えられるが，1 番目の条件 $s^2 = 0$ を満たすのは，$k = (0,0)$, $k = (\pi, 0)$ あるいは $(0, \pi)$, $k = (\pi, \pi)$ の場合であるから，それぞれ $M_c = 0, -2, -4$ となる．全体の相構造を決めるには一般の g^2 で上の方程式から M_c を数値的に求める必要があり，その結果から相構造を描いたのが

図 F.1 である．

最後に M_c 上では π_n の質量がゼロになることを示す．σ_n や π_n の伝搬関数の逆は S_{eff} の σ_n や π_n に関する 2 階微分で与えられ，その定数項が質量の 2 乗に比例する．したがって，π_n の質量を m_π^2 と書くと

$$
\begin{aligned}
m_\pi^2 &\propto \left\langle \frac{\delta^2 S_{\text{eff}}}{\delta\pi_n \delta\pi_m} \right\rangle_{\pi_n=\pi_0, \sigma_n=\sigma_0} = V\frac{\delta^2 V_{\text{eff}}}{\delta^2 \pi_0^2} \\
&= V\left[\frac{1}{g^2} - 2\int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{(\sigma_M + W(k))^2 + \pi_0^2 + s^2}\right. \\
&- \left.(2\pi_0)^2 \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{[(\sigma_M + W(k))^2 + \pi_0^2 + s^2]^2}\right] = 0 \qquad \text{(F.0.22)}
\end{aligned}
$$

となり，$M = M_c$ で「π 中間子」の質量がゼロになることが示された．最後の等式を示すのに，$M = M_c$ では $\pi_0 = 0$ であり，かつ，鞍点条件 (F.0.21) が満たされることを使っている．

付録 G

ドメインウォール・フェルミオンの伝搬関数の計算

ここでは相互作用のない場合 $(U_{n,\mu}=1)$ のドメインウォール・フェルミオンの伝搬関数を5次元方向の大きさ N_s が有限の場合で計算する．得られた結果を使うと $N_s \to \infty$ への外挿は容易に実行できる．

ゲージ場がない場合の格子作用を4次元の運動量表示で書くと

$$S = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \bar{\psi}(-p)_s \left[i\not{s}(p) + (W_m^+)_{st} P_{\rm L} + (W_m^-)_{st} P_{\rm R} \right] \psi(p)_t \quad \text{(G.0.1)}$$

となる．ここで，m_f をクォーク質量とすると

$$\begin{aligned} (W_m^+)_{st} &= W_{st}^+ + m_f \delta_{s,N_s}\delta_{t,1} \\ (W_m^-)_{st} &= W_{st}^- + m_f \delta_{s,1}\delta_{t,N_s} \\ W_{st}^\pm &= W\delta_{st} - \delta_{t,s\pm 1} \\ W &= 1 - M_0 + \sum_\mu (1-\cos p_\mu) \end{aligned}$$

である．この表示を使うとフェルミオンの伝搬関数は形式的に

$$S_F(p)_{st} = \left[\left(-i\not{s}(p) + W_m^-\right) G_{\rm L} P_{\rm L} + \left(-i\not{s}(p) + W_m^+\right) G_{\rm R} P_{\rm R} \right]_{st} \quad \text{(G.0.2)}$$

と書ける．ここで，

$$\begin{aligned} G_{\rm L}(s,t) &\equiv \left(\frac{1}{s^2(p) + W_m^+ W_m^-} \right)_{st} \\ G_{\rm R}(s,t) &\equiv \left(\frac{1}{s^2(p) + W_m^- W_m^+} \right)_{st} \end{aligned}$$

と定義される．この $G_{\rm L,R}$ を具体的に計算すれば伝搬関数が求まる．

はじめに $G_{\rm L}$ を計算する．$G_{\rm L}$ の定義からその満たすべき方程式は

$$\sum_u \left[(x+W^+W^-)_{su}+m_f(W^+_{s1}\delta_{u,N_s}+\delta_{s,N_s}W^-_{1u})+m_f^2\delta_{s,N_s}\delta_{u,N_s}\right]G_{\rm L}(u,t)$$
$$=\delta_{s,t} \tag{G.0.3}$$

となる．ここでは，$x=s^2(p)$ と置いた．5 次元の境界 $s=1,N_s$ 以外でのこの方程式の解は

$$G_{\rm L}(s,t)$$
$$=G(s-t)+A_{++}e^{\alpha(s+t)}+A_{+-}e^{\alpha(s-t)}+A_{-+}e^{\alpha(-s+t)}+A_{--}e^{\alpha(-s-t)} \tag{G.0.4}$$

で与えられる．ここで

$$\begin{aligned} G(s-t) &= A(e^{\alpha(N_s-|s-t|)}+e^{-\alpha(N_s-|s-t|)}) \\ \cosh\alpha &\equiv \frac{1+W^2+x}{2W} \\ A &\equiv \frac{1}{2W\sinh\alpha}\times\frac{1}{2\sinh(\alpha N_s)} \end{aligned} \tag{G.0.5}$$

は方程式 $(x+W^+W^-)G_{\rm L}=1$ の特解である．また，他の 4 つの項は斉次方程式 $(x+W^+W^-)G_{\rm L}=0$ の一般解である．$s=1$ での方程式は

$$(x+W^2+1)G_{\rm L}(1,t)-WG_{\rm L}(2,t)+Wm_fG_{\rm L}(N_s,t) = \delta_{1,t} \tag{G.0.6}$$

となるが，方程式 $(x+W^+W^-)G_{\rm L}=1$ との差を取ると境界条件

$$W\{G_{\rm L}(0,t)+m_fG_{\rm L}(N_s,t)\} = 0 \tag{G.0.7}$$

が得られる．同様に $s=N_s$ での方程式

$$(x+W^2)G_{\rm L}(N_s,t)-WG_{\rm L}(N_s-1,t)+Wm_fG_{\rm L}(1,t)+m_f^2G_{\rm L}(N_s,t)$$
$$=\delta_{N_s,t} \tag{G.0.8}$$

から

$$G_{\rm L}(N_s,t)-WG_{\rm L}(N_s+1,t)-Wm_fG_{\rm L}(1,t)-m_f^2G_{\rm L}(N_s,t) = 0 \tag{G.0.9}$$

という境界条件が得られる．2 つの境界条件に解 (G.0.4) を代入すると方程式

$$\begin{pmatrix} 1+m_f e^{\alpha N_s} & 1+m_f e^{-\alpha N_s} \\ e^{\alpha N_s}(1-We^{\alpha}-m_f^2-Wm_f e^{\alpha(1-N_s)}) & e^{-\alpha N_s}(1-We^{-\alpha}-m_f^2-Wm_f e^{\alpha(N_s-1)}) \end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix} A_{++} & A_{+-} \\ A_{-+} & A_{--} \end{pmatrix}$$
$$=-A\begin{pmatrix} e^{-\alpha N_s}+m_f & e^{\alpha N_s}+m_f \\ (1-We^{-\alpha}-m_f^2-Wm_f e^{-\alpha(N_s+1)}) & (1-We^{\alpha}-m_f^2-Wm_f e^{\alpha(N_s+1)}) \end{pmatrix} \tag{G.0.10}$$

が得られるので，これを解くと，

$$\begin{pmatrix} A_{++} \\ A_{-+} \end{pmatrix} = \frac{A}{F}\begin{pmatrix} (e^{-2\alpha N_s}-1)(1-We^{-\alpha})(1-m_f^2) \\ 2W\sinh(\alpha)[1+2m_f\cos(\alpha N_s)+m_f^2] \end{pmatrix} \tag{G.0.11}$$

$$\begin{pmatrix} A_{+-} \\ A_{--} \end{pmatrix} = \frac{A}{F}\begin{pmatrix} 2W\sinh(\alpha)[1+2m_f\cos(\alpha N_s)+m_f^2] \\ (1-e^{2\alpha N_s})(1-We^{\alpha})(1-m_f^2) \end{pmatrix} \tag{G.0.12}$$

と係数 $A_{\pm\pm}$ が求まる．ここで

$$\begin{aligned} F &= e^{\alpha N_s}[1-We^{\alpha}+m_f^2(We^{-\alpha}-1)]-4Wm_f\sinh(\alpha) \\ &+ e^{-\alpha N_s}[We^{-\alpha}-1+m_f^2(1-We^{\alpha})] \end{aligned} \tag{G.0.13}$$

である．

同様に G_{R} を

$$\begin{aligned} &G_{\mathrm{R}}(s,t) \\ &= G(s-t)+B_{++}e^{\alpha(s+t)}+B_{+-}e^{\alpha(s-t)}+B_{-+}e^{\alpha(-s+t)}+B_{--}e^{\alpha(-s-t)} \end{aligned} \tag{G.0.14}$$

と置いて境界条件

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{R}}(N_s+1,t)+m_f G_{\mathrm{R}}(1,t) &= 0 \\ G_{\mathrm{R}}(1,t)-WG_{\mathrm{R}}(0,t)-Wm_f G_{\mathrm{R}}(N_s,t)-m_f^2 G_{\mathrm{R}}(1,t) &= 0 \end{aligned}$$

に代入して方程式を解くと

$$\begin{pmatrix} B_{++} \\ B_{-+} \end{pmatrix} = \frac{A}{F}\begin{pmatrix} (e^{-2\alpha N_s}-1)e^{-\alpha}(e^{-\alpha}-W)(1-m_f^2) \\ 2W\sinh(\alpha)[1+2m_f\cos(\alpha N_s)+m_f^2] \end{pmatrix} \quad \text{(G.0.15)}$$

$$\begin{pmatrix} B_{+-} \\ B_{--} \end{pmatrix} = \frac{A}{F}\begin{pmatrix} 2W\sinh(\alpha)[1+2m_f\cos(\alpha N_s)+m_f^2] \\ (1-e^{2\alpha N_s})e^{\alpha}(e^{\alpha}-W)(1-m_f^2) \end{pmatrix} \quad \text{(G.0.16)}$$

と係数 $B_{\pm\pm}$ が求まる．こうしてフェルミオンの伝搬関数が求まった．

ここで求まったフェルミオンの伝搬関数の，$p \to 0$ での振る舞いを見てみよう．$W = 1 - M_0 + \frac{p^2}{2} + O(p^4)$ であることを使うと

$$1 - We^{\alpha} = -\frac{p^2}{M_0(2-M_0)} \quad \text{(G.0.17)}$$

であり，これ以外の組み合わせは $p \to 0$ でもゼロでない定数が残る．したがって，

$$\begin{aligned} F &= -\frac{e^{\alpha N_s}}{M_0(2-M_0)}\left[p^2 + M_0^2(2-M_0)^2 m_f^2\right] - 2M_0(2-M_0)m_f \\ &- \frac{e^{-\alpha N_s}}{M_0(2-M_0)}\left[m_f^2 p^2 + M_0^2(2-M_0)^2\right] \end{aligned} \quad \text{(G.0.18)}$$

となるので，伝搬関数の極について次のようなことがわかる．まず，$N_s \to \infty$ の極限ではフェルミオンの質量は $M_0(2-M_0)m_f$ である．したがって，$m_f \to 0$ では確かにゼロモードが現われる．しかし，有限の N_s では $O(e^{-\alpha N_s}) \simeq O((1-M_0)^{N_s})$ の質量を持ってしまうので，ゼロモードではなくなる．

最後に $m_f = 0$ での各係数の振舞を考えよう．N_s が充分大きいと，

$$\begin{aligned} A_{++} &= \frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\ A_{-+} &= -\frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\ A_{+-} &= -\frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\ A_{--} &= -\frac{1}{M_0(2-M_0)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_{++} &= -\frac{1}{M_0(2-M_0)}e^{-2\alpha(N_s+1)} \\
B_{-+} &= -\frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\
B_{+-} &= -\frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{-2\alpha N_s} \\
B_{--} &= \frac{M_0(2-M_0)}{p^2}e^{2\alpha}
\end{aligned}
\tag{G.0.19}
$$

となる．この結果は本文第７章で使われている．

付録 H

ドメインウォール・フェルミオンに対するウォード・高橋恒等式の導出

ここではドメンウォール・フェルミオンの場合のウォード・高橋恒等式の導出を行う．

ドメインウォール・フェルミオン作用は式 (7.2.1) に質量項 (7.4.2) を加えたもので与えられる．この作用に対してカイラル変換 (7.6.3) に対応する無限小変換

$$
\begin{aligned}
\delta\psi_{n,s} &= i\theta^a_{n,s}\tau^a\psi_{n,s} \\
\delta\bar{\psi}_{n,s} &= -i\bar{\psi}_{n,s}\theta^a_{n,s}\tau^a
\end{aligned}
$$

を施す．ただし，無限小パラメタ $\theta_{n,s}$ は (n,s) の両方に依存させておく．この時，作用の変化は

$$
\begin{aligned}
\delta S_F &= i\sum_{n,s}\theta^a_{n,s}\left[V^a_\mu(n,s) - V^a_\mu(n-\hat{\mu},s) + V^a_5(n,s) - V^a_5(n,s-1)\right. \\
&+ \left. m_f(\delta_{s,N_s} - \delta_{s,1})P^a(n)\right] \qquad \text{(H.0.1)}
\end{aligned}
$$

で与えられる．ここで，

$$
\begin{aligned}
V^a_\mu(n,s) &= \bar{\psi}_{n+\hat{\mu},s}P_\mu U^\dagger_{n,\mu}\tau^a\psi_{n,s} - \bar{\psi}_{n,s}P_{-\mu}U_{n,\mu}\tau^a\psi_{n+\hat{\mu},s} \qquad \text{(H.0.2)} \\
V^a_5(n,s) &= \bar{\psi}_{n,s+1}P_{\rm R}\tau^a\psi_{n,s} - \bar{\psi}_{n,s}P_{\rm L}\tau^a\psi_{n,s+1} \qquad \text{(H.0.3)} \\
P^a(n) &= \bar{\psi}_{n,1}P_{\rm R}\tau^a\psi_{n,N_s} - \bar{\psi}_{n,N_s}P_{\rm L}\tau^a\psi_{n,1} \qquad \text{(H.0.4)}
\end{aligned}
$$

である．ただし，6 章で導入した記号 $P_{\pm\mu} = (1 \pm \gamma_\mu)/2$ を用いた．また，δS_F の表式の中では $V^a_5(n,0) = V^a_5(n,N_s) = 0$ と定義している．

演算子 $\mathcal{O}$ の期待値の表式

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}U \ \mathcal{O} \exp[S_G + S_F] \tag{H.0.5}$$

に $\psi' = \psi + \delta\psi$, $\bar{\psi}' = \bar{\psi} + \delta\bar{\psi}$ という変数変換を施しても期待値は変わらない，ということから，

$$\langle \ \delta S_F \ \mathcal{O} + \delta \ \mathcal{O} \ \rangle = 0 \tag{H.0.6}$$

という式が導かれる．これがウォード・高橋恒等式である．$\theta^a_{n,s}$ は勝手に取れるのでその係数がゼロという条件から

$$\langle \left[\nabla^-_\mu V^a_\mu(n,s) + \nabla^-_5 V_5(n,s) - m_f(\delta_{s,N_s} - \delta_{s,1}) P^a(n) \right] \mathcal{O} + \delta^a_{n,s} \ \mathcal{O} \rangle = 0 \tag{H.0.7}$$

が得られる．ここで，$\delta\mathcal{O} = i\theta^a_{n,s}\delta^a_{n,s}\mathcal{O}$ ということを使った．この式に対して s について和をとる．ただし，$\epsilon(s-(N_s+1)/2)$ を掛けておいて，$s = 1, 2, \cdots, n_s/2$ にはマイナス符号をつけておく．こうすれば式 (7.6.3,7.6.4) で与えられたカイラル変換に対応するウォード・高橋恒等式が得られる．その結果は

$$\langle \left[\nabla^-_\mu A^a_\mu(n) + 2m_f P^a(n) - 2j^a_5(n) \right] \mathcal{O} + \delta^a_n \mathcal{O} \rangle = 0 \tag{H.0.8}$$

となる．ここで，

$$A^a_\mu(n) = \sum_s \epsilon(s-(N_s+1)/2) V^a_\mu(n,s) \tag{H.0.9}$$

$$P^a(n) = \bar{\psi}_{n,1} P_{\mathrm{R}} \tau^a \psi_{n,N_s} - \bar{\psi}_{n,N_s} P_{\mathrm{L}} \tau^a \psi_{n,1} = \bar{q}_n \gamma_5 \tau^a q_n \tag{H.0.10}$$

$$\begin{aligned} j^a_5(n) &= -\frac{1}{2} \sum_s \epsilon(s-(N_s+1)/2) \left[V^a_5(n,s) - V^a_5(n,s-1) \right] \\ &= V^a_5(n, N_s/2) \end{aligned} \tag{H.0.11}$$

$$\delta^a_n \mathcal{O} = \sum_s \epsilon(s-(N_s+1)/2) \delta^a_{n,s} \mathcal{O} \tag{H.0.12}$$

である．式 (H.0.8) が本文に与えたウォード・高橋恒等式 (7.6.5) である．

付録 I
ドメインウォール・フェルミオンを用いた overlap 演算子の導出

ここではGW関係式を満たす演算子の代表であり本文でも考察したoverlap演算子の具体形（の１つ）をドメインウォール・フェルミオンの $N_s \to \infty$ 極限によって導出する．

ドメインウォール・フェルミオンの作用は本文で与えたように

$$S_{\mathrm{DW}} = \sum_{s,t=1}^{N_s} \sum_{n} \bar{\psi}_{n,s} \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{2} \left(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger \right) \delta_{s,t} + P_L M_{st} + P_R M_{st}^\dagger \right\} \psi_{n,t} \tag{I.0.1}$$

となる．ただし，

$$M_{st} = \frac{1}{a_5} \left[\delta_{s,t} B - \delta_{t,s+1} \right] = \begin{pmatrix} B & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

$$B = 1 - a_5 \left(\frac{a}{2} \nabla_\mu \nabla_\mu^\dagger + \frac{M_0}{a} \right)$$

と４次元時空の格子間隔 a や５次元（フレーバー）方向の格子間隔 a_5 を復活させて書いておく．ここに書いた M の具体形は $N_s = 6$ の場合である．格子上の「差分」は

$$a\nabla_\mu f(n) \quad = \quad U_{n,\mu} f(n+\hat{\mu}) - f(n) \qquad \text{(I.0.2)}$$

$$a\nabla^\dagger_\mu f(n) \quad = \quad f(n) - U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu} f(n-\hat{\mu}) \qquad \text{(I.0.3)}$$

と定義される．

ここでは物理的フェルミオン q, $\bar{q}$ 以外を積分して得られる有効作用

$$S^{\text{eff}} \quad = \quad a^4 \sum_n \bar{q}_n [D^{\text{eff}} \cdot q]_n \qquad \text{(I.0.4)}$$

を求めることを考える．q に対する伝搬関数が分かれば D^{eff} が求まるので，

$$a^4 \sum_n \left(\bar{J}_n q_n + \bar{q}_n J_n \right) \qquad \text{(I.0.5)}$$

という q に対する外場を作用 (I.0.1) に加えて伝搬関数を計算する．実際の計算では q 以外の場を逐次的に積分して行くので，その形を $N_s = 4$ の場合に具体的に書き下し，その結果から一般の N_s の場合の結果を類推するという方法を取る．$N_s = 4$ の場合の作用を座標 s とフェルミオンの Left と Right の成分を分けて 8×8 の行列を使って書くと以下のようになる．

$$S_{\text{DW}} \quad = \quad a^4 \sum_n \bar{\Psi}_n [D_{\text{DW}} \cdot \Psi]_n \qquad \text{(I.0.6)}$$

ここで

$$\bar{\Psi} \quad = \quad \begin{pmatrix} \bar{\psi}^{\text{L}}_1 & \bar{\psi}^{\text{R}}_1 & \bar{\psi}^{\text{L}}_2 & \bar{\psi}^{\text{R}}_2 & \bar{\psi}^{\text{L}}_3 & \bar{\psi}^{\text{R}}_3 & \bar{\psi}^{\text{L}}_4 & \bar{\psi}^{\text{R}}_4 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.0.7)}$$

$$\Psi \quad = \quad \begin{pmatrix} \psi^{\text{R}}_1 \\ \psi^{\text{L}}_1 \\ \psi^{\text{R}}_2 \\ \psi^{\text{L}}_2 \\ \psi^{\text{R}}_3 \\ \psi^{\text{L}}_3 \\ \psi^{\text{R}}_4 \\ \psi^{\text{L}}_4 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.0.8)}$$

$$D_{\mathrm{DW}} = \frac{1}{a_5}\begin{pmatrix} B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C^\dagger & B & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C^\dagger & B & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & B & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -C^\dagger & B & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & B & C \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C^\dagger & B \end{pmatrix} \tag{I.0.9}$$

である．また，カイラル表現のガンマ行列

$$\gamma_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_\mu \\ \sigma_\mu^\dagger & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{I.0.10}$$

を使って

$$C = a_5\sigma_\mu \frac{1}{2}\left(\nabla_\mu + \nabla_\mu^*\right) \tag{I.0.11}$$

$$C^\dagger = -a_5\sigma_\mu^\dagger \frac{1}{2}\left(\nabla_\mu + \nabla_\mu^*\right) \tag{I.0.12}$$

と定義している．なるべく上三角行列に近い形にするために，始めに Ψ の中の Left と Right を入れ換える．

$$\begin{pmatrix} \psi_s^R \\ \psi_s^L \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \psi_s^L \\ \psi_s^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \psi_s^R \\ \psi_s^L \end{pmatrix} \quad (s = 1, 2, 3, 4) \tag{I.0.13}$$

この時,

$$\Rightarrow \quad D'_{\mathrm{DW}} = \frac{1}{a_5}\begin{pmatrix} C & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B & -C^\dagger & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & C & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & -C^\dagger & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & C & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & -C^\dagger & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & C & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & -C^\dagger \end{pmatrix}$$

と変換される．ここで更に 1 番上の行を一番下に持って持って行くと

$$\Rightarrow \quad D''_{\rm DW} = \frac{1}{a_5}\begin{pmatrix} B & -C^\dagger & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & C & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B & -C^\dagger & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & C & B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B & -C^\dagger & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & C & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & B & -C^\dagger \\ C & B & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となるが，この 2 つの変換で，対応する場は

$$\begin{aligned} \bar{\Psi} \Rightarrow \bar{\Psi}'' &\equiv \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1''^{\rm R} & \bar{\psi}_1''^{\rm L} & \bar{\psi}_2''^{\rm R} & \bar{\psi}_2''^{\rm L} & \bar{\psi}_3''^{\rm R} & \bar{\psi}_3''^{\rm L} & \bar{\psi}_4''^{\rm R} & \bar{\psi}_4''^{\rm L} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1^{\rm R} & \bar{\psi}_2^{\rm L} & \bar{\psi}_2^{\rm R} & \bar{\psi}_3^{\rm L} & \bar{\psi}_3^{\rm R} & \bar{\psi}_4^{\rm L} & \bar{\psi}_4^{\rm R} & \bar{\psi}_1^{\rm L} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{I.0.14}$$

$$\Psi \Rightarrow \Psi'' \equiv \begin{pmatrix} \psi_1''^{\rm L} \\ \psi_1''^{\rm R} \\ \psi_2''^{\rm L} \\ \psi_2''^{\rm R} \\ \psi_3''^{\rm L} \\ \psi_3''^{\rm R} \\ \psi_4''^{\rm L} \\ \psi_4''^{\rm R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^{\rm L} \\ \psi_1^{\rm R} \\ \psi_2^{\rm L} \\ \psi_2^{\rm R} \\ \psi_3^{\rm L} \\ \psi_3^{\rm R} \\ \psi_4^{\rm L} \\ \psi_4^{\rm R} \end{pmatrix} \tag{I.0.15}$$

と変換する．この新しい変数を使うと，クォーク場は

$$\begin{aligned} q_n &= P_L\psi_{n,1} + P_R\psi_{n,N_s} = P_L\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\psi''_{n,1} + P_R\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\psi''_{n,N_s} \\ \bar{q}_n &= \bar{\psi}_{n,1}P_R + \bar{\psi}_{n,N_s}P_L = \bar{\psi}''_{n,N_s}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるので，外場との結合は

$$a^4\sum_n\left\{\bar{J}_n\left[P_L\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\psi''_{n,1}+P_R\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\psi''_{n,N_s}\right]\right.$$
$$\left.+\quad\bar{\psi}''_{n,N_s}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}J_n\right\} \qquad \text{(I.0.16)}$$

と書き直せる．$D''_{\rm DW}$ を各々のブロックが 2×2 の行列である 2×2 のブロックで書き表すために，次のような量を定義をする．

$$\alpha = \frac{1}{a_5}\begin{pmatrix}B&-C^\dagger\\0&-1\end{pmatrix},\quad \beta=\frac{1}{a_5}\begin{pmatrix}-1&0\\C&B\end{pmatrix},$$
$$\alpha_0 = \frac{1}{a_5}\begin{pmatrix}B&-C^\dagger\\0&0\end{pmatrix},\quad \beta_0=\frac{1}{a_5}\begin{pmatrix}0&0\\C&B\end{pmatrix}. \qquad \text{(I.0.17)}$$

この定義を使うと

$$D''_{\rm DW} = \begin{pmatrix}\alpha&\beta&0&0\\0&\alpha&\beta&0\\0&0&\alpha&\beta\\\beta_0&0&0&\alpha_0\end{pmatrix} \qquad \text{(I.0.18)}$$

となる．

外場との結合を加えた作用に対して $\psi'',\bar{\psi}''$ 積分を $s=1$ から逐次実行していく．$s=1$ が関係する部分は

$$\left[\bar{J}_nP_L\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\bar{\psi}''_{n,N_s}\beta_0\right]\psi''_{n,1}+\bar{\psi}''_{n,1}\alpha\psi''_{n,1}+\bar{\psi}''_{n,1}\beta\psi''_{n,2}$$

となる．ここで，$s=1$ の変数の積分を実行すると，$s=2$ に関する部分は

$$\left[\bar{J}_nP_L\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\bar{\psi}''_{n,N_s}\beta_0\right](-\alpha^{-1}\beta)\psi''_{n,2}+\bar{\psi}''_{n,2}\alpha\psi''_{n,2}+\bar{\psi}''_{n,2}\beta\psi''_{n,3}$$

となり，その積分を実行すると $s=3$ に対して

$$\left[\bar{J}_nP_L\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\bar{\psi}''_{n,N_s}\beta_0\right](-\alpha^{-1}\beta)^2\psi''_{n,3}+\bar{\psi}''_{n,3}\alpha\psi''_{n,3}+\bar{\psi}''_{n,3}\beta\psi''_{n,4}$$

を得る．以下同様に N_s-1 まで積分すると

$$\bar{J}_n \left[P_L \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (-\alpha^{-1}\beta)^{N_s-1} + P_R \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \psi''_{n,N_s}$$

$$+ \quad \bar{\psi}''_{n,N_s} \left[\alpha_0 + \beta_0 (-\alpha^{-1}\beta)^{N_s-1} \right] \psi''_{n,N_s} + \bar{\psi}''_{n,N_s} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J_n \quad \text{(I.0.19)}$$

となる．ここで現れる項を具体的に計算するために以下のような準備をする．

$$\alpha^{-1} = a_5 \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}C^\dagger \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \beta^{-1} = a_5 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ B^{-1}C & B^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\alpha_0\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_{\rm L} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_0\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} P_{\rm R} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

また，転送行列とそのハミルトニアン

$$T \equiv e^{-a_5\hat{H}} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}C \\ -C^\dagger B^{-1} & B + C^\dagger B^{-1}C \end{pmatrix} \quad \text{(I.0.20)}$$

を使うと

$$-\beta\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} B^{-1} & -B^{-1}C^\dagger \\ -CB^{-1} & B + CB^{-1}C^\dagger \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma_5 e^{a_5\hat{H}} \gamma_5 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{(I.0.21)}$$

と書くことができる．以上の公式を用いて変形すると以下のような結果を得る．

$$\left[P_{\rm L}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(-\alpha^{-1}\beta)^{N_s-1}+P_{\rm R}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right]\alpha^{-1}$$

$$=\left[P_{\rm L}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\beta^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\gamma_5e^{a_5N_s\hat{H}}+P_{\rm R}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\alpha^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}(-\gamma_5)\right]$$

$$\times(-\gamma_5)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=a_5\left[P_R+P_Le^{a_5N_s\hat{H}}\right](-\gamma_5)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix} \quad \text{(I.0.22)}$$

$$\left[\alpha_0+\beta_0(-\alpha^{-1}\beta)^{N_s-1}\right]\alpha^{-1}=\alpha_0\alpha^{-1}-\beta_0\beta^{-1}(-\beta\alpha^{-1})^{N_s}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\left[P_{\rm L}+P_{\rm R}e^{a_5N_s\hat{H}}\right](-\gamma_5)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$$

この結果を代入して $s=N_s$ の変数を積分すると

$$\begin{aligned}
&-a^4\sum_n\bar{J}_na_5\left\{\left[P_R+P_Le^{a_5N_s\hat{H}}\right](-\gamma_5)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}\\
\times\ &\left\{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\left[P_{\rm L}+P_{\rm R}e^{a_5N_s\hat{H}}\right](-\gamma_5)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right\}^{-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}J_n\\
=\ &-a_5a^4\sum_n\bar{J}_n\left\{\frac{P_R+P_Le^{a_5N_s\hat{H}}}{P_{\rm L}+P_{\rm R}e^{a_5N_s\hat{H}}}J\right\}_n
\end{aligned} \quad \text{(I.0.23)}$$

を得る．したがって，クォーク場の伝搬関数は

$$\begin{aligned}
\langle q_n\bar{q}_m\rangle &= \frac{\delta^2}{a^8\delta\bar{J}_n\delta J_m}\log Z(J,\bar{J})\\
&= -\frac{a_5}{a^4}\frac{P_R+P_Le^{a_5N_s\hat{H}}}{P_{\rm L}+P_{\rm R}e^{a_5N_s\hat{H}}}(n,m)=-\frac{a_5}{a^4}\frac{1-\gamma_5\tanh a_5\frac{N_s}{2}\hat{H}}{1+\gamma_5\tanh a_5\frac{N_s}{2}\hat{H}}(n,m)
\end{aligned}$$

となるので，この伝搬関数を与える有効作用を

$$a^4\sum_n\bar{q}_n\left[D_{\rm eff}\ q\right]_n \quad \text{(I.0.24)}$$

と定義すると

$$D_{\rm eff}(n,m)=-\frac{1}{a^4}\langle q_n\bar{q}_m\rangle^{-1}=\frac{1}{a_5}\frac{1+\gamma_5\tanh a_5\frac{N_s}{2}\hat{H}}{1-\gamma_5\tanh a_5\frac{N_s}{2}\hat{H}}(n,m) \quad \text{(I.0.25)}$$

が得られる．これがクォークに対する有効作用である．

Pauli-Villars field に対する有効作用は

$$a^4 \sum_n \bar{Q}_n \left\{ D_{\rm eff} + \frac{1}{a_5} \right\} Q_n \qquad \text{(I.0.26)}$$

で与えられるので，結局，(有限の N_s の場合の)overlap 演算子は

$$aD_{\rm overlap} \;=\; \frac{D_{\rm eff}}{D_{\rm eff} + \frac{1}{a_5}} = \frac{1}{2}\left(1 + \gamma_5 \tanh a_5 \frac{N_s}{2} \hat{H}\right) \qquad \text{(I.0.27)}$$

となる．$N_s \to \infty$ の極限では，

$$D_{\rm overlap} \;\to\; \frac{1}{2a}\left(1 + \gamma_5 \frac{\hat{H}}{\sqrt{\hat{H}^2}}\right) \qquad \text{(I.0.28)}$$

となり，確かに GW 関係式を満たす Overlap fermion の演算子になっている．ただし，ここで現れるハミルトニアン $\hat{H}$ はエルミート化されたウィルソン・フェルミオンの演算子ではなく，その転送行列 T から

$$\hat{H} \;=\; -\frac{1}{a_5} \ln T \qquad \text{(I.0.29)}$$

と定義されたものである．

ここで $a_5 \to 0$ の極限を考える．この時，

$$\begin{aligned} T \;&=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_5 \begin{pmatrix} \left(\frac{a}{2}\nabla_\mu \nabla_\mu^\dagger + \frac{M_0}{a}\right) & -\sigma_\mu \frac{1}{2}(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger) \\ \sigma_\mu^\dagger \frac{1}{2}(\nabla_\mu + \nabla_\mu^\dagger) & -\left(\frac{a}{2}\nabla_\mu \nabla_\mu^\dagger + \frac{M_0}{a}\right) \end{pmatrix} + O(a_5^2) \\ &=\; 1 - a_5 \gamma_5 D_W(-M_0) + O(a_5^2) \end{aligned} \qquad \text{(I.0.30)}$$

となる．ここで，$D_W(M_0)$ は質量パラメタが M_0 であるウィルソン・フェルミオン演算子である．したがって，

$$\lim_{a_5 \to 0} \hat{H} \;=\; \gamma_5 D_W(-M_0) = H_W(-M_0) \qquad \text{(I.0.31)}$$

となり，overlap 演算子は

$$\lim_{a_5 \to 0} \lim_{N_s \cdot a_5 \to \infty} D_{\rm overlap} \;=\; \frac{1}{2a}\left(1 + \gamma_5 \frac{H_W(-M_0)}{\sqrt{H_W^2(-M_0)}}\right) \qquad \text{(I.0.32)}$$

と，本文で紹介したエルミート化されたウィルソン・フェルミオン演算子 H_W を用いたものになる．

付録 J

GW関係式を満たす演算子の固有値と固有関数

ここでは，本文で使ったものを含め，GW 関係式を満たす演算子 D の固有値や固有関数のいろいろな性質をまとめておく．

§J.1　基本的な性質

GW 関係式

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D \quad = \quad aDR\gamma_5 D \tag{J.1.1}$$

と $\gamma_5 D\gamma_5 = D^\dagger$ を満たす D が存在する．ただし，R はエルミートで γ_5 と可換であるとする．

⇔

$$D \quad = \quad \frac{1}{Ra}(1+V), \tag{J.1.2}$$

$$V^\dagger V \quad = \quad VV^\dagger = 1, \qquad \gamma_5 V\gamma_5 = V^\dagger \tag{J.1.3}$$

を満たす V が存在する．

（証明）⇒

$$D \quad = \quad \frac{1}{Ra}(1+V) \tag{J.1.4}$$

と置き，GW 関係式に代入すると，

$$\gamma_5 \quad = \quad V\gamma_5 V \to 1 = \gamma_5 V\gamma_5 V = V\gamma_5 V\gamma_5 \tag{J.1.5}$$

が言える．また，$\gamma_5 D\gamma_5 = D^\dagger$ より，$\gamma_5 V\gamma_5 = V^\dagger$ も言える．したがって，

$$V^\dagger V = VV^\dagger = 1. \tag{J.1.6}$$

$\Leftarrow$

$\gamma_5 V\gamma_5 = V^\dagger$ より，$\gamma_5 D\gamma_5 = D^\dagger$ は明らか．また，

$$aDR\gamma_5 D = \frac{1}{Ra}\{2\gamma_5 + V\gamma_5 + \gamma_5 V\} \tag{J.1.7}$$

である．一方，

$$D\gamma_5 + \gamma_5 D = \frac{1}{Ra}\{2\gamma_5 + V\gamma_5 + \gamma_5 V\} \tag{J.1.8}$$

なので，GW 関係式も成り立つ．(証明終)

これからは $R_{nm} = R\delta_{nm}$ でかつ R が実数の場合だけを考える．以下のようにして $D^\dagger D = DD^\dagger$ であることが言える．

$$\begin{aligned} D^\dagger D &= \gamma_5 D\gamma_5 D = \frac{1}{Ra}[\gamma_5 D\gamma_5 + D] = \frac{1}{Ra}[D + \gamma_5 D\gamma_5] = D\gamma_5 D\gamma_5 \\ &= DD^\dagger. \end{aligned} \tag{J.1.9}$$

この性質を使うと D の固有関数と固有値に関して次のことがわかる．D の固有値 λ に対する固有関数を

$$D|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \tag{J.1.10}$$

で定義する．この時，$D^\dagger D = DD^\dagger$ を使うと

$$DD^\dagger|\lambda\rangle = D^\dagger D|\lambda\rangle = \lambda D^\dagger|\lambda\rangle \tag{J.1.11}$$

となるから，$D^\dagger|\lambda\rangle$ も固有値 λ に属する固有関数である．縮退のある可能性も考慮して，

$$D^\dagger|\lambda, i\rangle = \sum_j C_{ij}|\lambda, j\rangle \tag{J.1.12}$$

と置く．ここで，$i = 1, \cdots, n_\lambda$ は縮退度 n_λ の縮退を区別する添字であり，添字が異なるとその固有関数同士は直交しているとする．固有方程式のエルミート共役から

$$\langle\lambda, i|D^\dagger = \langle\lambda, i|\bar{\lambda} \tag{J.1.13}$$

となるから，

$$\langle\lambda, k|D^\dagger|\lambda, i\rangle = \bar{\lambda}\delta_{ki} \quad = \quad C_{ik} \tag{J.1.14}$$

と係数行列が求まる．このことから

$$D^\dagger|\lambda, i\rangle \quad = \quad \bar{\lambda}|\lambda, i\rangle \tag{J.1.15}$$

であり，$|\lambda, i\rangle$ は D と $D^\dagger$ の同時固有関数になっている．したがって，

$$D^\dagger D|\lambda, i\rangle \quad = \quad \bar{\lambda}\lambda|\lambda, i\rangle \tag{J.1.16}$$

である．

前にも述べたように，GW 関係式を使うと

$$\langle\lambda|(D + D^\dagger)|\lambda\rangle \quad = \quad Ra\langle\lambda|D^\dagger D|\lambda\rangle \tag{J.1.17}$$

となり，

$$\lambda + \bar{\lambda} = Ra\bar{\lambda}\lambda \tag{J.1.18}$$

が言える．$\lambda = x + iy$ と置くと，上の関係式は

$$(x - \frac{1}{Ra})^2 + y^2 = (\frac{1}{Ra})^2 \tag{J.1.19}$$

となる．つまり，D の（複素）固有値 λ は複素平面内の中心 $(1/(Ra), 0)$，半径 $1/(Ra)$ の円上に分布する．したがって，λ が実数になるのは $\lambda = 0$ か $\lambda = \dfrac{2}{Ra}$ の時だけである．

§J.2　$H^2 = D^\dagger D$ の固有値と固有関数

次に $H^2 = D^\dagger D$ の固有値問題を考える．ここで，$H = \gamma_5 D$ で定義されるエルミート演算子である．GW 関係式を使うと

$$\begin{aligned}[H^2, \gamma_5] &= [D^\dagger D, \gamma_5] = \gamma_5 D\gamma_5 D\gamma_5 - D\gamma_5 D \\ &= \frac{1}{Ra}\{\gamma_5(\gamma_5 D + D\gamma_5)\gamma_5 - (\gamma_5 D + D\gamma_5)\} = 0 \end{aligned} \tag{J.2.1}$$

なので，H^2 の固有状態

$$H^2|\Lambda\rangle = \Lambda|\Lambda\rangle \tag{J.2.2}$$

は同時に γ_5 の固有状態になっている．前に示したように

$$D^\dagger D|\lambda\rangle = \bar{\lambda}\lambda|\lambda\rangle \tag{J.2.3}$$

$$DD^\dagger|\bar{\lambda}\rangle = \lambda\bar{\lambda}|\bar{\lambda}\rangle \tag{J.2.4}$$

であるから，$\Lambda = \bar{\lambda}\lambda$ が言える．そして，カイラルな固有状態

$$\gamma_5|\Lambda\pm\rangle = \pm|\Lambda\pm\rangle \tag{J.2.5}$$

は，例えば

$$|\Lambda\pm\rangle \equiv C\frac{1\pm\gamma_5}{2}|\lambda\rangle \tag{J.2.6}$$

と構成できる．ここで C は規格化定数である．

この表式を別の形に書き換えてみよう．式 (J.1.15) を使うと

$$D\gamma_5|\lambda\rangle = \gamma_5 D^\dagger|\lambda\rangle = \bar{\lambda}\gamma_5|\lambda\rangle \tag{J.2.7}$$

が言えるので，$\gamma_5|\lambda\rangle$ は D の固有値が $\bar{\lambda}$ である固有関数である．したがって，縮退がある場合も考慮すると

$$\gamma_5|\lambda, i\rangle = \sum_j U_{ij}|\bar{\lambda}, j\rangle \tag{J.2.8}$$

$$\tag{J.2.9}$$

と展開される．この表式を使うと

$$\delta_{ij} = \langle\lambda, j|\gamma_5\gamma_5|\lambda, i\rangle = (U\cdot U^\dagger)_{ij} \tag{J.2.10}$$

となるので，U がユニタリ行列であることが言える．したがって，縮退のない場合には，

$$\gamma_5|\lambda\rangle = e^{-i\theta}|\bar{\lambda}\rangle \tag{J.2.11}$$

であり，

$$|\Lambda\pm\rangle \equiv C\frac{|\lambda\rangle \pm e^{-i\theta}|\bar{\lambda}\rangle}{2} \tag{J.2.12}$$

となる．こうして，H^2 のカイラルな固有関数と D の固有関数との間に関係がついた．

§J.3　$H=\gamma_5 D$ の固有値と固有関数

最後にエルミート演算子 $H=\gamma_5 D$ を考える．

$$H \quad = \quad \gamma_5 \frac{1}{Ra}(1+V), \quad VV^\dagger = V\gamma_5 V\gamma_5 = 1 \tag{J.3.1}$$

であるから，H の固有値 λ_H は

$$-\frac{2}{Ra} \leq \lambda_H \leq \frac{2}{Ra} \tag{J.3.2}$$

を満たす．実際，H^2 の固有値が Λ の場合，$\lambda_H^2=\Lambda$ であり，$\Lambda=\bar{\lambda}\lambda$ の最大値は $(\dfrac{2}{Ra})^2$ なので不等式は正しい．

H の固有関数

$$H|\lambda_H\rangle \quad = \quad \lambda_H|\lambda_H\rangle \tag{J.3.3}$$

がカイラル，つまり，

$$\gamma_5|\lambda_H\rangle \quad = \quad \pm|\lambda_H\rangle \tag{J.3.4}$$

となる条件を考えよう．GW 関係式より

$$H+\gamma_5 H\gamma_5 \quad = \quad Ra\gamma_5 H^2 \tag{J.3.5}$$

だから，カイラルの場合，

$$2\lambda_H \quad = \quad \pm Ra\lambda_H^2 \tag{J.3.6}$$

となる．したがって，

$$\lambda_H \quad = 0, \frac{2}{Ra} \qquad \text{for } \gamma_5|\lambda_H\rangle = |\lambda_H\rangle \tag{J.3.7}$$

$$\lambda_H \quad = 0, -\frac{2}{Ra} \qquad \text{for } \gamma_5|\lambda_H\rangle = -|\lambda_H\rangle \tag{J.3.8}$$

である．

$\Gamma_5 \equiv \gamma_5(1-\dfrac{Ra}{2}D)$ と定義すると，GW 関係式より

$$\{H,\Gamma_5\} \quad = \quad H\Gamma_5+\Gamma_5 H = \gamma_5 D\gamma_5 + D - Ra\gamma_5 D\gamma_5 D = 0 \tag{J.3.9}$$

なので，H と Γ_5 は反可換である．したがって，λ_H が固有値であり，

$$H|\lambda_H\rangle \quad = \quad \lambda_H|\lambda_H\rangle \tag{J.3.10}$$

を満たすならば，

$$H\Gamma_5|\lambda_H\rangle = -\Gamma_5 H|\lambda_H\rangle = -\lambda_H\Gamma_5|\lambda_H\rangle \quad \text{(J.3.11)}$$

となり，$-\lambda_H$ も固有値となる．ただし，$\lambda_H \neq 0$ であり，また，

$$\Gamma_5|\lambda_H\rangle \neq 0 \quad \text{(J.3.12)}$$

が必要である．$\Gamma_5|\lambda_H\rangle = 0$ となる条件は

$$\langle\lambda_H|\Gamma_5\Gamma_5|\lambda_H\rangle = \langle\lambda_H|(1-\frac{R^2a^2}{4}H^2)|\lambda_H\rangle = 1-\frac{R^2a^2}{4}\lambda_H^2 = 0 \quad \text{(J.3.13)}$$

だから，$\lambda_H = \pm\frac{2}{Ra}$ である．以上のことから，固有値が $(\lambda_H, -\lambda_H)$ とペアになるのは「カイラルでない」場合であることが言えた．

§J.4　固有値，固有関数の分類と相互の関係

ここでは D，$H=\gamma_5 D$，$H^2 = D^\dagger D$ それぞれの固有値，固有関数の分類と相互の関係を詳しく見ていく．

1. $\lambda_H = 0$（カイラル）

   $\lambda_H = 0$ の固有関数はカイラルである．つまり，$\gamma_5|\lambda_H = 0, \pm\rangle = \pm|\lambda_H = 0, \pm\rangle$ である．また，この固有関数は同時に $\Lambda = 0$ や $\lambda = 0$ に対応する固有関数にもなっている．

$$|\lambda_H = 0, \pm\rangle = |\Lambda = 0, \pm\rangle = |\lambda = 0, \pm\rangle \quad \text{(J.4.1)}$$

2. $\lambda_H = \pm\frac{2}{Ra}$（カイラル）

   $\lambda_H = \pm 1/(Ra)$ の固有関数もカイラルである．

$$\gamma_5|\lambda_H = \frac{2}{Ra}\rangle = +|\lambda_H = \frac{2}{Ra}\rangle, \quad \text{(J.4.2)}$$

$$\gamma_5|\lambda_H = -\frac{2}{Ra}\rangle = -|\lambda_H = -\frac{2}{Ra}\rangle \quad \text{(J.4.3)}$$

   この時，$\lambda = \pm\frac{2}{Ra}$ は実数であるので，

$$|\lambda_H = \frac{2}{Ra}, +\rangle = |\Lambda = (\frac{2}{Ra})^2, +\rangle = |\lambda = \frac{2}{Ra}, +\rangle \quad \text{(J.4.4)}$$

$$|\lambda_H = -\frac{2}{Ra}, -\rangle = |\Lambda = (\frac{2}{Ra})^2, -\rangle = |\lambda = \frac{2}{Ra}, -\rangle \quad \text{(J.4.5)}$$

最後の式では固有値は正であることに注意．これは

$$D|\lambda_H = -\frac{2}{Ra}, -\rangle = \gamma_5 H|\lambda_H = -\frac{2}{Ra}, -\rangle = -\frac{2}{Ra}\gamma_5|\lambda_H = -\frac{2}{Ra}, -\rangle$$
$$= \frac{2}{Ra}|\lambda_H = -\frac{2}{Ra}, -\rangle \tag{J.4.6}$$

より明らか．

3. $0 < \lambda_H^2 < (\frac{2}{Ra})^2$
この時，固有値は必ず $(\lambda_H, -\lambda_H)$ という正負の組で現われ，H の固有関数はカイラルではない．

$$H|\lambda_H\rangle \quad = \quad \lambda_H|\lambda_H\rangle \tag{J.4.7}$$

を一つの規格化された固有関数とすると，$-\lambda_H$ に対する固有関数は

$$|-\lambda_H\rangle \equiv C\Gamma_5|\lambda_H\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 - R^2a^2\lambda_H^2/4}}\left(\gamma_5 - \frac{Ra}{2}\lambda_H\right)|\lambda_H\rangle \tag{J.4.8}$$

となる．ここで，

$$1 \quad = \quad C^2\langle\lambda_H|\Gamma_5\Gamma_5|\lambda_H\rangle = C^2(1 - \frac{R^2a^2}{4}\lambda_H^2) \tag{J.4.9}$$

であることを用いた．また，簡単のために規格化因子は実数にとった．この時，$|\lambda_H\rangle$ と $|-\lambda_H\rangle$ が直交することから，

$$\langle\lambda_H|\gamma_5|\lambda_H\rangle \quad = \quad \frac{Ra}{2}\lambda_H \tag{J.4.10}$$

が言える．また，

$$\langle-\lambda_H|\gamma_5|-\lambda_H\rangle = -\frac{Ra}{2}\lambda_H \tag{J.4.11}$$

$$\langle-\lambda_H|\gamma_5|\lambda_H\rangle = \langle\lambda_H|\gamma_5|-\lambda_H\rangle = \frac{1}{\sqrt{1-R^2a^2\lambda_H^2/4}}[1-\frac{Ra}{2}\lambda_H\langle\lambda_H|\gamma_5|\lambda_H\rangle]$$
$$= \sqrt{1-(\frac{Ra}{2}\lambda_H)^2} \tag{J.4.12}$$

と計算される．

したがって，H の固有状態を使って D を計算すると，

$$D = \begin{pmatrix} \frac{Ra}{2}\lambda_H^2 & -\lambda_H\sqrt{1-(\frac{Ra}{2}\lambda_H)^2} \\ \lambda_H\sqrt{1-(\frac{Ra}{2}\lambda_H)^2} & \frac{Ra}{2}\lambda_H^2 \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_H \begin{pmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & x \end{pmatrix} \quad \text{(J.4.13)}$$

となる．ただし，ここで $x = \dfrac{Ra\lambda_H}{2}$ と置いた．したがって，

$$\lambda_{\pm} = \lambda_H \left\{ \frac{Ra\lambda_H}{2} \pm i\sqrt{1-(\frac{Ra}{2}\lambda_H)^2} \right\} \quad \text{(J.4.14)}$$

と固有値が求まり，その固有関数も

$$|\lambda \equiv \lambda_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\lambda_H\rangle - i|-\lambda_H\rangle\} \quad \text{(J.4.15)}$$
$$|\bar{\lambda} \equiv \lambda_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\lambda_H\rangle + i|-\lambda_H\rangle\} \quad \text{(J.4.16)}$$

で与えられる．また，γ_5 をやはり H の固有状態で計算すると

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix} \quad \text{(J.4.17)}$$

となる．この γ_5 の固有値は確かに ± 1 であり，その固有関数は，$|\pm\lambda_H\rangle$ が H^2 の固有関数であることから，カイラルな H^2 の固有関数

$$|\Lambda = \lambda_H^2, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{1+x}|\lambda_H\rangle + \sqrt{1-x}|-\lambda_H\rangle] \quad \text{(J.4.18)}$$
$$|\Lambda, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[\sqrt{1-x}|\lambda_H\rangle - \sqrt{1+x}|-\lambda_H\rangle] \quad \text{(J.4.19)}$$

が求まる．

上で求めた表現を使うと，

$$D^\dagger|\lambda\rangle = \lambda_H(x - i\sqrt{1-x^2})\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\lambda_H\rangle - i|-\lambda_H\rangle\} = \bar{\lambda}|\lambda\rangle \quad \text{(J.4.20)}$$
$$\gamma_5|\lambda\rangle = (x - i\sqrt{1-x^2})\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\lambda_H\rangle + i|-\lambda_H\rangle\} = e^{-i\theta}|\bar{\lambda}\rangle \quad \text{(J.4.21)}$$

と計算できる．ただし，$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ である．前にも示したが，具体的な表現を用いても

$$H^2|\lambda\rangle \quad = \quad \bar{\lambda}\lambda|\lambda\rangle \tag{J.4.22}$$

であることがわかり，また

$$|\Lambda, \pm\rangle \quad = \quad C_0 \frac{1 \pm \gamma_5}{\sqrt{2}}|\lambda\rangle = \frac{C_0}{\sqrt{2}}\left\{|\lambda\rangle \pm e^{-i\theta}|\bar{\lambda}\rangle\right\} \tag{J.4.23}$$

は式 (J.2.12) を再現する．さらに計算を進めると

$$|\Lambda, \pm\rangle \quad = \quad \frac{C_0}{2}\left\{(1 \pm e^{-i\theta})|\lambda_H\rangle - i(1 \mp e^{-i\theta})| - \lambda_H\rangle\right\} \tag{J.4.24}$$

となり，複素位相 C_0 ($|C_0|^2 = 1$) を

$$C_0 \quad = \quad \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 \pm x}}{1 \pm e^{-i\theta}} \tag{J.4.25}$$

と取れば前の答え (J.4.18,J.4.19) を再現する．

以上が，3 つの演算子 $H = \gamma_5 D$, H^2, D(or $D^\dagger$) の固有値と固有関数の相互の関係である．

付録 K

ゲージ固定の計算方法

格子ゲージ理論ではすべての計算をゲージ不変に行うことができるので，ゲージ固定の必要はない．しかしながら，例えば

$$\bar{\psi}(x)\psi(y) \tag{K.0.1}$$

のような離れた2点に関する物理量をゲージ不変にするには x と y を結ぶ線の上のリンク変数の積を間に挟む必要があるが，実際の計算でそのようなリンク変数の積をいちいち計算するのは煩雑である．また，リンク変数を挟むと統計揺らぎも大きくなり誤差を増大させてしまう．そこで，リンク変数を挟む代りにゲージ固定をして計算する方法がしばしば使われている．もともとゲージ不変な物理量はゲージ固定の影響を受けないのでゲージ固定をしてもその計算は変更を受けない．ゲージ固定は演算子の改良などでしばしば使われるので，ここでその計算アルゴリズムを簡単に紹介する．

§K.1　ゲージ固定条件

連続理論のゲージ固定，例えばクーロン・ゲージ固定は

$$\sum_{\mu=1}^{3} \partial_\mu A_\mu(x) \quad = \quad 0 \tag{K.1.1}$$

という条件で与えられるが，格子ゲージ理論のクーロン・ゲージ固定条件は

$$H(U) \quad = \quad \sum_n \sum_{\mu=1}^{3} \mathrm{Re}[\mathrm{tr}\ U_{n,\mu}] \tag{K.1.2}$$

をゲージ変換によって最大にすることで実現される．実際，最大値を与えるリンク変数 $U_{n,\mu} = e^{iagA_{n,\mu}}$ に対して格子点 n で無限小ゲージ変換をすると

$$\begin{aligned}\delta H(U) &= \frac{-i}{2}\mathrm{tr}\ \theta_n \sum_{\mu=1}^{3} \left\{ (U_{n-\hat{\mu},\mu} - U_{n,\mu}) - (U^{\dagger}_{n-\hat{\mu}} - U^{\dagger}_{n,\mu}) \right\} \\ &= -ag\mathrm{tr}\ \theta_n \sum_{\mu=1}^{3} (A_{n,\mu} - A_{n-\mu,\mu}) + \cdots \\ &= -a^2 g\mathrm{tr}\ \theta_n \sum_{\mu=1}^{3} \partial_\mu A_\mu(n) + \cdots = 0 \qquad \text{(K.1.3)}\end{aligned}$$

となるので，たしかに連続極限でクーロン・ゲージ固定条件に一致する．

§K.2　SU(2) 部分群による解法

格子点 n を一つ選び，ゲージ変換 g_n を考える．この時，

$$\begin{aligned}H(U^g) &= \mathrm{Re\ tr}\ \ [g_n \sum_{\mu=1}^{3} (U_{n,\mu} + U^{\dagger}_{n-\mu,\mu})] \\ &+ \ \{g_n \text{ independent terms}\} \qquad \text{(K.2.1)}\end{aligned}$$

となるので，g_n に依存した項を最大にすることを考える．はじめにゲージ群が SU(2) の場合を考える．熱浴法のところでもやったように

$$\sum_{\mu=1}^{3} (U_{n,\mu} + U^{\dagger}_{n-\mu,\mu}) = V = RU \qquad \text{(K.2.2)}$$

と書けるはずである．ここで，$R = \det V$, $U \in \mathrm{SU}(2)$ である．したがって，

$$\mathrm{Re\ tr}\ \ [g_n \sum_{\mu=1}^{3} (U_{n,\mu} + U^{\dagger}_{n-\mu,\mu})] = \mathrm{Re}\ R\ \mathrm{tr}\ \ (g_n U) \qquad \text{(K.2.3)}$$

であるから，$g_n U = 1$，つまり $g_n = U^{-1}$ というゲージ変換がこの量の最大値を与える．この条件は偶奇性が同じ格子点 n で独立なので，偶奇性の同じすべての格子点 n に対して g_n が同時に求まる．アルゴリズムとしては，はじめに偶な格子点で上記のゲージ変換を行い，次に変換されたゲージ場を用いて奇な格子点で対応したゲージ変換を行う．これを何回か繰り返していく

と H の最大値に収束していく．SU(3) などの場合は，やはり熱浴法と同じように SU(2) 部分群を考え，同様の変換をすればよい．もちろん 2 つ以上の SU(2) 部分群を使う必要がある．

§K.3 最速下降法

SU(2) 部分群の方法の収束はあまり速くないので，収束を加速する最速下降法 (Steepest descent method) を紹介する．ゲージ変換を $g_n = \exp(it^a\theta_n^a)$ としたとき，H の θ_n^a に関する（無限小の）変分を考えると

$$\frac{\delta H}{\delta\theta_n^a} = \mathrm{tr}\left[-it^a\Delta_n\right] \tag{K.3.1}$$

$$\begin{aligned}\Delta_n &= \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\left[(U_{n-\hat{\mu},\mu} - U_{n,\mu}) - (U^\dagger_{n-\hat{\mu},\mu} - U^\dagger_{n,\mu})\right] \\ &\quad - \mathbf{1}\frac{\text{trace part}}{N}\end{aligned} \tag{K.3.2}$$

となる．ここで，$\Delta_n^\dagger = -\Delta_n$, $\mathrm{tr}\ \ \Delta_n = 0$ なので，

$$\Delta_n = i\sum_a t^a c^a \tag{K.3.3}$$

と書けるはずである．もし H が最大値を取っていたら $\delta H = 0$ であるから，$\Delta_n = 0$ となる．最大値でない場合は $\Delta_n \neq 0$ なので，その方向の成分を消すようにその方向に対する以下のようなゲージ変換

$$g_n = \exp(\alpha_n\Delta_n) \tag{K.3.4}$$

を考えることにする．H の α_n に関する微分がゼロになる条件，

$$\frac{\partial H}{\partial\alpha_n} = \mathrm{Re}\ \sum_{\mu=1}^{3}\mathrm{tr}\ \left[e^{\alpha_n\Delta_n}\Delta_n U_{n,\mu} - U_{n-\hat{\mu},\mu}\Delta_n e^{-\alpha_n\Delta_n}\right] = 0 \tag{K.3.5}$$

を α_n の 1 次まで展開して解くと，

$$\alpha_n = \frac{\mathrm{Re\ tr}\ \ \Delta_n\sum_\mu\{U_{n-\hat{\mu},\mu} - U_{n,\mu}\}}{\mathrm{Re\ tr}\ \ \Delta_n^2\sum_\mu\{U_{n-\hat{\mu},\mu} + U_{n,\mu}\}} \tag{K.3.6}$$

と α_n が求まる．やはりこのゲージ変換を格子点の偶奇で分けて行なうのだが，極大値の近くでは Δ_n が小さくなるのでゲージ変換が 1 に近くなり，収

束の速度が遅くなる．それを改善するために過緩和法（$1 < \omega < 2$）を用いて

$$g_n \quad = \quad \exp(\omega \alpha_n \Delta_n) \tag{K.3.7}$$

とするとよい．経験的に $\omega \simeq 2$ がもっとも収束が良い．

この方法では最大値を取らない極大値（つまり局所最大値）があると一般に収束は保証されない．そこで実用では，SU(2) 部分群の方法をはじめに使って真の最大値にある程度近づけてから，最速下降法に切替えるのが効率的である．

付録 L

参考文献

ここでは本書の内容に関係する文献を紹介する．ただし，すべての文献を網羅したようなものではなく，本書を書く時に参考にしたものを中心に必要最低限のものにしかすぎないことを心に留めておいていただきたい．その代わり，各文献に関する簡単なコメントを附けたので参考にして頂きたい．

§L.1　場の理論や格子場の理論の教科書など

場の理論の教科書はたくさんあるが，その中で実際に (一部でも) 読んだことがあるものについて (すべてではないが) コメントする．[1] は大学院で場の理論を勉強した時に使った教科書であり，発売された直後で「モダン」な教科書であった．700 ページにも及ぶ分厚い教科書であり，正準量子化から始まって，繰り込み，経路積分，ゲージ場の量子化などいろいろなことが書いてあるが，手っ取り早く場の理論の基礎を学ぶには少し長すぎるかもしれない．(実際，私もこの教科書はその一部分を勉強しただけである．) [2] はゲージ場の理論の教科書であり，経路積分 (汎関数積分) を用いたゲージ場の量子化を通して場の量子論を学ぶ内容になっている．汎関数の方法を用いた教科書には [3] があるが，残念ながら詳しく読んだことはない．筑波大の素粒子論研究室ではここ数年 (執筆時は 2004 年) は [4] を修士 1 年の輪講に用いている．ただし，大学 4 年生で前半の 4 章までやるので修士では 5 章から読み始める．この本は著者の博識を反映して物理現象に関係するいろいろな内容が書かれた良い教科書であるが，初学者が場の量子論の構造を学ぶには

もうすこし簡単な記述の方がいいかもしれない．そこで，今年 (2004 年) から大学の 4 年生では [5] を使って輪講をやっている．この教科書では場の理論の定式化は必要最低限の記述であるが，そのかわりに素粒子論の最先端に関する内容で理解可能なものを多く取り上げている．

最近は日本語で書かれた場の量子論の教科書も増えてきたが，特に [6] は定評のある教科書で，大学院の場の量子論の授業では多いに参考にした．この本は他の教科書ではともすればにあいまいにされがちな点を理論的にきちっと書いており，特に著者らによってなされたゲージ理論の正準量子化に関する記述は (外国の教科書を含めても) 他の追随を許さないと思う．素粒子論の大学院生や研究者にとっては非常に役立つ本であるが，初学者が場の理論を学ぶには少し難しいかも知れない．

格子上の場の理論の教科書はそれほど多くない．残念ながら日本語のものはない．[7] は初期の頃の格子ゲージ理論の教科書であり，量は多くないが，新しく登場して来た理論の息吹が感じられる本である．格子上のゲージ場の力学的な性質に関する記述が詳しいが，フェルミオンなどに関する理論的発展，最近の数値計算の進展などに関する記述はもちろん書かれていない．また，これは教科書でなく総合報告 (レビュー) であるが文献 [8] も定評がある．院生当時このレビューでゼミをやったが，相転移などの物性物理に関する記述が詳しく，また，いろいろな格子モデルが取り上げられていて良い勉強になった．[9] も同時期の教科書であるが，格子理論を場の理論の厳密な定式化の方法と考える立場から書かれている．[10] の著者は格子理論の研究者ではないが，この教科書はしっかり書かれている．特に，摂動展開，KS フェルミオン，モンテカルロ法の基礎などの記述が詳しい．KS フェルミオン，モンテカルロ法の基礎の部分は本書でも参考にした．[11] は格子理論の研究者によって書かれた比較的新しい教科書である．個人的には読んだことはないが，筑波大学の大学院生でこの教科書で勉強した人は多いようだ．ぱらぱらと見たところ，場の理論の構成論的な定式化としての格子理論，強結合展開などの記述が詳しいようである．

§L.2　各章の参考文献:第I部

第1章

公理論的場の量子論に関して興味のある方は教科書 [12] とその中に挙げられた文献を参照して頂きたい．構成論的場の理論では教科書 [13] が有名であるが，残念ながらきちんと読んでいないのでコメントできない．

第3章

繰り込み群を「発明」した著者らによる総合報告 [14] は繰り込み群のレビューとして定評がある．繰り込み群に関する教科書 [15] は院生当時に学生だけで輪講したが，相転移現象に関する記述も丁寧で初学者にはわかりやすい．この章，および関連する付録 A の内容はその時の輪講仲間の 1 人が執筆した教科書 [16] の第 3 章を参考にした．繰り込み群による (スカラー) 場の理論の構成に関しては，[16] の 4 章で詳しく論じられている．また，原書論文 [17] や前述の [14] などでも議論されている．$\lambda\phi^4$ 理論の自明性 (Triviality) に関しては，例えば論文 [18] などが有名である．

第4章

ゲージ理論の予備知識としての群論に関しては教科書 [19] がある．

原著論文 [20] において，Wilson はクォークの閉じ込めを理解するための枠組として格子ゲージ理論を提案した．この論文において閉じ込めを判定するゲージ不変な物理量としてウィルソン・ループが導入された．歴史的な論文であり，それほど長くないので是非一度は目を通していただきたい．附録 C で詳しく証明した「Elitzur の定理」は論文 [21] で議論されている．

グルーボールに関しては，例えば論文 [22] とそこで引用されている論文を参照して頂きたい．毎年開催されている格子理論関係の交際会議の会議録を見ると最先端の計算結果がわかる．群上の不変積分や強結合展開は教科書 [7] や [11] に詳しい．特に [11] は強結合展開の高次項に関して詳しく論じられている．

第 5 章

格子フェルミオンに関する日本語の解説書に文献 [23] がある．そこでは第 5 章から第 8 章までの内容が紹介されている．

ウィルソンの格子ゲージ理論の原論文 [20] で導入されたフェルミオンは単純な格子フェルミオンでありダブリングの問題が存在した．ウィルソンはすぐにそのことに気づき，同じ題名の 2 つのレクチャー・ノート [24, 25] で，ウィルソン項を付け加えてダブラーを取り除くことを提唱した．このレクチャー・ノートは格子 QCD の簡単な入門書としても読む価値がある．

ニールセン・二宮の定理の証明は原論文 [26] にあるが，その証明方法は若干難しいので，本文ではより直観的な証明 [27] を紹介した．(そこで使われている数学に関して，ポアンカレ・ホップの定理は文献 [29] に詳しく，また，オイラー数などトポロジーに関する数学的な内容は例えば文献 [30] がある．) この論文での証明ではエルミート性が必要であったが，論文 [31] ではその条件なしの証明が与えられている．そこでは，平行移動不変性を仮定して得られたフェルミ場の 2 次形式の運動量空間での表示 $D(p)$ が次の 4 つの条件を同時に満たすことはできないことが証明されている．

運動量空間での連続性，周期性　$D(P)$ は p_μ のスムーズで周期 $2\pi/a$ の関数である．

物理的粒子の存在　$p \ll \pi/a$ なら $D(p) = i\gamma_\mu p_\mu + O(ap^2)$ と振舞う．

ダブラーの非存在　$D(p)$ は $p \neq 0$ なら逆を持つ．

カイラル対称性　$D(p)$ は γ_5 と反可換．

したがって,「ダブラーのない格子フェルミオンは作れない」ことが証明される．本文で紹介した証明は,「カイラル対称性を持つフェルミオンは必ず右巻きと左巻きのペアで現われる」というものだったので定理の帰結はほとんど同じであるが，数学的内容は少し違う．エルミート性を壊した例は「カイラル対称性を持ちダブラーはあるがペアでは現われない」という場合である．

KS フェルミオンは論文 [32] において導入された．このフェルミオンを Kogut-Susskind フェルミオンと呼ぶのは，論文 [32] でこのフェルミオンがハ

ミルトニアン形式で定式化されたことが，ウィルソンの格子ゲージ理論をハミルトニアン形式で定式化し直した論文 [33] の延長にあると考えられたからではないかと思われる．ただし，この説に確証はない．最近では Staggared(ずらされた) フェルミオンと呼ばれることが多い．このフェルミオンを 4 次元の作用の形で取り扱ったものに論文 [34] がある．本文を書くに当たっては教科書 [10] の KS フェルミオンの記述を参考にした．

第6章

フェルミオンを含んだ格子 QCD の強結合展開やホッピング・パラメタ展開に関する論文は大学院生の時に勉強したものを取り上げる (例えば修士論文をまとめた文献 [35] は手軽に読める内容であり，基礎的な論文も載っている) が，その他にもいろいろな文献があることに留意していただきたい．

本文で紹介したホッピング・パラメタ展開と強結合展開を組み合わせた計算方法は講義録 [25] にその萌芽が見られるが，ウィルソン・フェルミオンの場合の詳しい定式化は論文 [36] でなされた．(単純な格子フェルミオンの場合の計算は論文 [37] がある．)

有効作用の方法を用いた格子 QCD の強結合極限での計算は，ウィルソン・フェルミオンの場合に論文 [38](ゲージ群が U(N) でメソンのみ) や論文 [39](ゲージ群が SU(N) でバリオンも含む) で行われた．強結合極限でのスタガード・フェルミオンに対しては文献 [40, 41] があり，その後，論文 [42] で強結合展開の高次に拡張された．

ウィルソン・フェルミオンを用いた格子 QCD のパリティ・フレーバー対称性の破れとパイ中間子の質量や U(1) 問題との関係については一連の論文 [43] で主に強結合展開を用いて議論されている．論文 [44] はその総合報告である．モンテカルロ計算による研究結果は論文 [45, 46] で報告されており，パリティ・フレーバー対称性の破れと有限温度での相構造との関係は論文 [47, 48, 49] などで詳しく議論されている．また，カイラル摂動論をウィルソン・フェルミオンの格子 QCD に拡張することでこの相転移の存在が自然に導き出せることが論文 [50] で指摘されている．

論文 [51] で述べられている Vafa-Witten の定理は，「連続理論の QCD では

パリティは自発的に破れない」ことを主張している．この証明を注意深くウィルソン・フェルミオンの格子 QCD に拡張していくと，2 フレーバー QCD ではフレーバー 1 重項の期待値はゼロ，つまり，$\langle\bar{\psi}\gamma_5\psi\rangle = 0$，が証明できる．一方，$\langle\bar{\psi}\gamma_5\tau^3\psi\rangle$ に関しては何の制限も付かないことが分かる．

第 7 章

ドメインウォール・フェルミオンは Kaplan によって格子上でのカイラルゲージ理論の定式化の新しい方法として論文 [52] で提唱された．この方法でカイラルゲージ理論を定式化するにはいろいろ問題があることが分かってきたが，この方法を格子 QCD に適用してカイラル対称性を持つ格子 QCD を定式化する可能性が論文 [53, 54] で指摘された．最近はドメインウォール・フェルミオンを使った仕事は多いが，それらをここで 1 つ 1 つ引用することはしない．例えば，格子ゲージ理論の国際会議におけるレビュー講演 [55] とその中の引用文献を参考にして欲しい．

第 8 章

自由場に対する繰り込み群による解析により，連続理論のカイラル対称性が格子上ではギンスパーグ・ウィルソン関係式となることが論文 [56] で示された．この論文の発表後，この関係式のことはしばらく忘れられていたが，繰り込み群を使って格子 QCD 作用のスケーリングの振舞いを良くする方法として提案された「完全な作用」の方法によって構成されたフェルミオン作用がギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすことが指摘され [57]，再び，脚光を浴びた．本書では「完全な作用」については振れなかったが，興味のある方は，格子ゲージ理論の国際会議でのレビュー講演 [57] を見て頂きたい．

そのすぐ直後に，ドメインウォール・フェルミオンの違った定式化となっているオーバーラップ・フェルミオンもギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすことが分かり [58]，この分野の研究が活発になって来た．ギンスパーグ・ウィルソン関係式のウォード・高橋恒等式に依る解析 [59] に始まり，論文 [60] に於いて，この関係式を満たす作用の対称性が明らかになった．オバーラップ演算子に関してはその局所性が重要であり，その性質が論文 [61] によって

詳しく議論され，また，ドメインウォール・フェルミオンとオーバーラップ・フェルミオンの関係も論文 [63, 64] で明らかになってきている．ギンスパーグ・ウィルソン関係式を満たすフェルミオン演算子はその固有値と固有関数に制限がつく．このことはいろいろな論文で研究されているが，本書では論文 [65] に述べられている議論を中心に紹介した．

§L.3　各章の参考文献:第 II 部

第 II 部 実践編：モンテカルロ法によるハドロン質量の計算の部分でのモンテカルロ法の記述は，教科書 [10] の chaper15 を参考にした．また，筑波大学での同僚である吉江友照氏の講義ノートも多いに参考になったのでここに感謝したい．

第 11 章

SU(2) 格子ゲージ理論の熱浴法は論文 [67] で導入された．この論文は Wilson の論文 [20] と並んで格子ゲージ理論の歴史的論文の 1 つであるので一度は目を通していただきたい．SU(3) ゲージ理論など SU(2) 以外の群の格子ゲージ理論への拡張は論文 [68, 69] で行われた．

第 12 章

クォークの行列式の寄与を取り入れるアルゴリズムはいろいろ提案されてきたが，本文で紹介した HMC 法は現在もっともポピュラーな方法で論文 [70] で提案されたものである．奇数個のフレーバーがある場合の計算法は最近開発されたばかりであり，本文で紹介したのは論文 [71] のものである．

第 13 章

CG 法など大規模線形方程式の解法については例えば教科書 [72] などを参考にした．

第14章

ここで紹介した中間子や核子の伝搬関数の例はクエンチ近似のドメインウォールQCDで計算されたものである．また，ρ 中間子の有効質量の図はクエンチ近似のハドロンスペクトラムの計算 (論文 [73, 74]) のものである．これらの論文のデータは第16章や第17章でも使われている．最小2乗法によるフィットに使う最小化の方法として，例えば，SALS([75]) や Minuit([76]) などを使っている．

第15章

ここで示されたグラフは論文 [77, 78, 79] で得られた計算結果を使っている．

§L.4 付録の内容の参考文献

付録Eの $N \to \infty$ でのSU(N) 積分は論文 [43] の2番目の論文の付録で詳しく論じられている．付録Fで計算したウィルソン・フェルミオンを用いた格子Gross-Neveu模型の相構造の解析は論文 [43] の1番目の論文や論文 [80] で行われた．付録Gのドメインウォール・フェルミオンの伝搬関数の計算は論文 [81] で詳しく論じられ，付録Hのウォード・高橋恒等式は論文 [54] で導出された．付録Iで示したドメインウォール・フェルミオンからoverlap演算子を導く計算は論文 [63] のものである．付録Jの固有値の性質は論文 [65] に詳しい．

参考文献

[1] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, MacGraw-Hill, New York, 1980.

[2] L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge Field -Introduction to Quantum Theory*, Benjamin, New York, 1980; 2nd Edition, Addison-Wesley, Reading, 1991.

[3] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*(2nd Edition), Perseus Books, Reading, 1994.

[4] M.E. Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books, Reading, 1995.

[5] A. Zee, *Quantum Field Theory in a Nutshell*, Princeton University Press, 2003.

[6] 九後汰一郎 『ゲージ場の量子論 I，II』，培風館，東京，1989 年.

[7] M. Creutz, *Quarks, Gluons and Lattices*, Cambridge University Press, 1983.

[8] J.B. Kogut, *An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems*, Rev. Mod. Phys. 51 (1979) 659.

[9] E. Seiler, *Gauge Theories as a Problems of Constructive Quantum Field Theory and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[10] H.J. Rothe, *Lattice Gauge Theories, An Introduction*, World Scientific, Singapore, 1992.

[11] I. Montvay and G. Münster, *Quantum Fields on a Lattice*, Cambridge University Press, 1994.

[12] ボゴリューボフ他,『場の量子論の数学的方法』(江沢洋 他訳)，東京図書出版，東京，1980 年.

[13] J. Glim and A. Jaffe, *Quantum Physics, A Functional Integral Point of View*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[14] K.G. Wilson and J.B. Kogut, *Renormalization group and ε-expansion*, Phys. Report C12 (1974) 75.

[15] S.-K. Ma, *Modern Theory of Critical Phenomena*, Benjamin, New York, 1976.

[16] 江沢洋，渡辺敬二，鈴木増雄，田崎晴明 著,『繰り込み群の方法』(岩波講座 現代の物理学 第 13 巻)，岩波書店，東京，1994 年.

[17] K.G. Wilson, *Renormalization of a Scalar Field Theory in Strong Coupling*, Phys. Rev. D6 (1972) 419.

[18] M. Aizenman, *Geometric Analysis of ϕ^4 Field and Ising Models. Parts I and II*, Commun. Math. Phys. 86 (1982) 1
J. Fröhlich, *On the Triviality of $\lambda\phi^4_d$ Theories and the Approach to the Critical Point in $d \geq 4$ Dimensions*, Nucl. Phys. B200[FS4] (1982) 281.

[19] H. Georgi, *Lie Algebra in Particle Physics*, Benjamin, New York, 1982.

[20] K.G. Wilson, *Confinement of Quarks*, Phys. Rev. D10 (1974) 2445.

[21] S. Elitzur, *Impossibility of Spontaneously Broken Local Symmetry*, Phys. Rev. D12 (1975) 3978.

[22] C.J. Morningstar and M. Peardon, *The glueball spectrum from an anisotropic lattice study*, Phys. Rev. D60 (1990) 034509.

[23] 青木 慎也,『格子上のカイラルフェルミオン』(現代物理学最前線 7), 1-61 ページ, 共立出版株式会社, 東京, 2002 年. より短い紹介記事としては次のものがある. 青木 慎也,「格子上のカイラル対称性」, パリティ(丸善) 2002 年 6 月号 19 ページ.

[24] K.G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice*, in "Gauge Theories and Modern Field Theory" (ed. by R. Arnowitt and P. Nath), MIT Press, Cambridge, 1975.

[25] K.G. Wilson, *Quarks and Strings on a Lattice*, in "New Phenomena in Subnuclear Physics" (ed. by A. Zichichi), Plenum Press, New York, 1977.

[26] H.B. Nielsen and M. Ninomiya, *Absence of Neutrinos on a Lattice I. Proof by Homotopy Theory*, Nucl. Phys. B185 (1981) 20; erratum: B195 (1981) 541; *Absence of Neutrinos on a Lattice II. Intuitive Topology Proof*, Nucl. Phys. B193 (1981) 173.

[27] L.H. Karsten, *Lattice fermions in Euclidean space-time*, Phys. Lett. 104B (1981) 315.

[28] L.H. Karsten and J. Smit, *Lattice Fermions: Species Doubling, Chiral Invariance and the Triangle Anomaly*, Nucl. Phys. B183 (1981) 2649.

[29] J.W. Milnor, *Topology from the differential viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[30] 田村一郎,『トポロジー』(岩波全書), 岩波書店, 東京, 1972 年.

[31] D. Friedan, *A Proof of the Nielsen-Ninomiya Theorem*, Commun. Math. Phys. 85 (1982) 481.

[32] L. Susskind, *Lattice Fermions*, Phys. Rev. D16 (1977 3031.

[33] J. Kogut and L. Susskind, *Hamiltonian formulation of Wilson's lattice gauge theories*, Phys. Rev. D11 (1975) 395.

[34] H.S. Sharatchandra, H.J. Thun and P. Weisz, *Susskind Fermions on a Euclidean Lattice*, Nucl. Phys. B192 (1981) 205.

[35] 青木 慎也,「格子フェルミオンとカイラル対称性」, 素粒子論研究 (京都) 69 (1984) 107.

[36] N. Kawamoto, *Towards the phase structure of Euclidean lattice gauge theories with fermions*, Nucl. Phys. B190[FS3] (1981) 617.

[37] J.M. Blairon, B. Brout, F. Englert and J. Greensite, *Chiral Symmetry Breaking in the Action Formulation of Lattice Gauge Theory*, Nucl. Phys. B180[FS2](1981) 439.

[38] N. Kawamoto and J. Smit, *Effective Lagrangian and dynamical symmetry breaking in strongly coupled lattice QCD*, Nucl. Phys. B192(1981) 100.

[39] J. Hoek, N. Kawamoto and J. Smit, *Baryons in the effective Lagrangian of strongly coupled lattice QCD*, Nucl. Phys. B199(1982) 495.

[40] H. Kluberg-Stern, A. Morel, O. Napoly and B. Petersson, , Nucl. Phys. B190 (1981) 504.

[41] H. Kluberg-Stern, A. Morel and B. Petersson, *Spectrum of lattice gauge theories with fermions from* $1/d$ *expansion at strong coupling*, Nucl. Phys. B215[FS7] (1983) 527.

[42] I. Ichinose, *The Strong-coupling Expansion of Lattice QCD*, Phys. Lett. B135 (1984) 148; *Effective Lagrangian of Mesons and Baryons in the Strong-coupling Expansion of Lattice QCD*, Nucl. Phys. B249 (1985) 715.

[43] S. Aoki, *New phase structure for lattice QCD with Wilson fermions*, Phys. Rev. D30 (1984) 2653; *U(1) problem on a lattice: Strong-coupling limit*, Phys. Rev. D33 (1986) 2399; *U(1) problem on a lattice: Strong-coupling expansion*, Phys. Rev. D34 (1986) 3170; *Solution to the U(1) problem on a lattice*, Phys. Rev. Lett. 57 (1986) 3136.

[44] S. Aoki, *U(1) Problem and Lattice QCD*, Nucl. Phys. B314 (1989) 79.

[45] S. Aoki, *Numerical Evidence for a Parity-Violating Phase in Lattice QCD with Wilson Fermions*, Phys. Lett. B190 (1987) 140.

[46] S. Aoki and A. Gocksch, *Spontaneous Breaking of Parity in Quenched Lattice QCD with Wilson Fermions*, Phys. Lett. B231 (1989) 449; *More on parity and Wilson fermions. Quenched simulations in finite temperature QCD*, Phys. Lett. B243 (1990) 409.

[47] S. Aoki, A. Ukawa and T. Umemura, *Finite Temperature Phase Structure of Lattice QCD with Wilson Quark Action*, Phys. Rev. Lett. 76 (1996) 873.

[48] S. Aoki, T. Kaneda and A. Ukawa, *Structure of critical lines in quenched lattice QCD with the Wilson quark action*, Phys. Rev. D56 (1997) 1808.

[49] S. Aoki, *On the Phase structure of QCD with Wilson fermions*, Prog. Theor. Phys. Supplement 122 (1996) 179.

[50] S.R. Sharpe and R. Singleton Jr., *Spontaneous Flavor and Parity Breaking with Wilson Fermions*, Phys.Rev. D58 (1998) 074501.

[51] C. Vafa and E. Witten, *Parity Conservation in Quantum Chromodynamics*, Phys. Rev. Lett. 53 (1984) 535.

[52] D.B. Kaplan, *A Method for Simulating Chiral Fermions on the Lattice*, Phys. Lett. B288 (1992) 342.

[53] Y. Shamir, *Chiral Fermions from Lattice Boundaries*, Nucl. Phys. B406 (1993) 90.

[54] V. Furman and Y. Shamir, *Axial symmetries in lattice QCD with Kaplan fermions*, Nucl. Phys. B439 (1995) 54.

[55] T. Blum, *'Domain wall fermions in vector gauge theories*, Nucl. Phys. B(Proc. Suppl.)73 (1999) 167.

[56] P.H. Ginsparg and K.G. Wilson, *A Remnant of Chiral Symmetry on the Lattice*, Phys. Rev. D25 (1982) 2649.

[57] P. Hasenfratz, *Prospects for perfect actions*, Nucl. Phys. B(Proc. Suppl.)63A-C (1998) 53.

[58] N. Neuberger, *More about exactly massless quarks on the lattice*, Phys. Lett. B427 (1998) 353.

[59] P. Hasenfratz, V. Laliena and F. Niedermayer, *The index theorem in QCD with a finite cut-off*, Phys. Lett. B427 (1998) 125.

[60] M. Lüscher, *Exact chiral symmetry on the lattice and the Ginsparg-Wilson relation*, Phys. Lett. B428 (1998) 342.

[61] P. Hernandez, K. Jansen and M. Lüscher, *Locality properties of Neuberger's lattice Dirac operator*, Nucl. Phys. B552 (1999) 363.

[62] N. Neuberger, *Bounds on the Wilosn Dirac Operator*, Phys. Rev. D61 (2000) 085015.

[63] Y. Kikukawa and T. Noguchi, *Low energy effective action of domain-wall fermion and the Ginsparg-Wilson relation*, hep-lat/9902022.

[64] Y. Kikukawa, *Locality bound for effective four-dimensional action of domain-wall fermion*, Nucl. Phys. B584 (2000) 511.

[65] K. Fujikawa, *Relation* $Tr\gamma_5 = 0$ *and the index theorem in lattice gauge theory*, Phys. Rev. D60 (1999) 074505.

[66] A. Ukawa, *Lattice QCD at Finite Temperature*,

[67] M. Creutz, *Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory*, Phys. Rev. D21 (1980) 2308.

[68] N. Cabibbo and E. Marinari, *A new method for updating SU(N) matrices in computer simulations of gauge theories*, Phys. Lett. 119B (1982) 387.

[69] M. Okawa, *Monte Carlo Study of the Eguchi-Kawai Model*, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 353.

[70] S. Duane, A. D. Kennedy, B. J. Pendleton and D. Roweth, *Hybrid Monte Carlo*, Phys. Lett. 195B (1987) 216.

[71] JLQCD Collaboration(S. Aoki *et al.*), *Polynomial Hybrid Monte Carlo Algorithm for Lattice QCD with Odd Number of Flavors*, Phys. Rev. D65 (2002) 094507.

[72] 森 正武，『数値解析』(共立数学講座 12)，共立出版株式会社，東京，1973 年.

[73] CP-PACS Collaboration (S. Aoki *et al.*), *Quenched Light Hadron Spectrum*, Phys. Rev. Lett. 84 (2000) 238.

[74] CP-PACS Collaboration (S. Aoki *et al.*), *Light Hadron Spectrum and Quark Masses from Quenched Lattice QCD*, Phys. Rev. D66 (2002) 077501.

[75] 小柳義夫・中川徹，『*SALS* 入門』，東大出版会，東京，1990 年.

[76] http://wwwasdoc.web.cern.ch/wwwasdoc/minuit/minmain.html を参照.

[77] CP-PACS Collaboration (S. Aoki *et al.*), *Dynamical Quark Effects on Light Quark Masses*, Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 4674.

[78] CP-PACS Collaboration (S. Aoki *et al.*), *Light Hadron Spectroscopy with Two Flavors of Dynamical Quarks on the Lattice*, Phys. Rev. D65(2002)054505.

[79] CP-PACS Collaboration (S. Aoki *et al.*), *Topological Susceptibility in Lattice QCD with Two Flavors of Dynamical Quarks*, Phys. Rev. D64(2001)114501.

[80] S. Aoki and K. Higashijima, *The recovery of the chiral symmetry in lattice Gross-Neveu model*, Prog. Theor. Phys. 76 (1986) 521.

[81] S. Aoki and Y. Taniguchi, *One loop calculation in lattice QCD with domain-wall quarks*, Phys. Rev. D59 (1999) 054510.

索 引

■欧文・記号先頭
d（ダウン）クォーク　*167*
d 次元トーラス　*74*

Elituzr の定理　*258*

Gross-Neveu 模型　*271*
GW 関係式を満たす演算子 D の固有値や固有関数　*292*

HMC 法での詳細釣り合い証明　*186*
HMC 法のアルゴリズム　*190*

index　*146*

KS フェルミオンの方法　*85*

$\lambda\phi^4$ 理論　*9*
$\lambda\phi^4$ 理論に対する繰り込み変換　*30*
$\lambda\phi^4$ 理論の相構造　*18*

$\overline{\mathrm{MS}}$ 処方で繰り込まれた結合定数　*241*

N 回ヒットの擬熱浴アルゴリズム　*176*

overlap 演算子　*284, 291*

PCAC (Partially Conserved Axialvector Current) 関係式　*84, 113, 138*
PHMC 法　*193*
π 中間子　*224*
π 中間子の 2 点関数　*169*

QCD のラグランジュアン　*43*

Schwinger-Dyson 方程式　*269*
smearing　*214*
SU(2) 格子ゲージ理論の熱浴法　*174*
SU(3) の擬熱浴法　*177*
SU(N) のリー代数　*46*
s（ストレンジ）クォーク　*167*

tadpole　*238*
tadpole 図　*242*

u（アップ）クォーク　*167*
$U(1)$ 問題　*114*

Wick の縮約規則　*250*
Wilson-Fisher 固定点　*37*

■ア行
アインシュタインの既約　*9*
鞍点　*273*

1 の分解　*14*
一様乱数　*174*
1 粒子状態　*14*
1 リンク積分　*269*
意味のある (relevant) パラメタ　*41*

ウィルソン・パラメタ　*78*
ウィルソン・フェルミオン　*79*
ウィルソン・フェルミオン演算子　*147*
ウィルソン・フェルミオン演算子のゼロ固有値　*118*
ウィルソン・フェルミオンの相構造　*116*
ウィルソン・ループ　*52, 95*

ウィルソン・ループの期待値　60, 64
ウィルソン項　78
ウォード・高橋恒等式　81, 82, 139, 282
運動量空間　246

オイラー数　74
オーバーラップ・ディラック演算子　152
重いモードの取り扱い　141

■カ行
カイラル・アノマリー　77
カイラル・アノマリーの計算　261
カイラル射影演算子　127
カイラル対称性　73
カイラル対称性の秩序変数　81
カイラル電荷　75
カイラルフェルミオン　122
改良された (improved)2 階差分　13
ガウス型固定点　31
ガウス型（紫外）固定点　36
ガウス乱数　190
過緩和法　176, 304
可逆性　186
確率分布　182
仮想的な質量　233
加法的（Additive）な繰り込み　239
「軽い」ハドロン　167
カレントの繰り込み　234
完全系　83

規格化されたゼロモード解　130
擬スカラー　98
基底状態　211
擬フェルミオン場　188
擬ベクター　98
既約　179
ギャップ方程式　96
キャラクター　64
キャラクター展開　63
キュムラント展開　249
強結合展開　57, 59, 93
共変微分　257
共役傾斜法 (CG 法)　196, 199
ギンスパーグ・ウィルソン関係式　144

偶奇前処理　201
クエンチ QCD　173
クエンチ近似　172
クォーク質量依存性　224
クォーク伝搬関数　195
クォークの伝搬関数　171
クォークの閉じ込め　54
クォーク場　132
クォーク場の質量項　132
繰り込まれた軌跡　41
繰り込み　232
繰り込み群　25, 27
繰り込み定数　240
グルーボール　54
グロス・ヌボー模型　116
群上の不変測度　50
群積分の公式　57

傾斜　196
傾斜法　195
経路順序積 (path ordered product)　44
ゲージ固定　214, 301
ゲージ固定条件　301
ゲージ不変性　43
弦張力　54

格子 Gross-Neveu 模型の相構造　274
格子 QCD の HMC 法　191
格子作用の連続極限　255
格子上の量子色力学　93
格子フェルミオン作用　71
格子フェルミオンの指数定理　157
誤差伝搬　217
固有値と固有関数　159

■サ行
最小二乗法　214, 219
最速下降法　303
作用の改良　13
三角形ダイアグラム　263
残差ベクトル　196

紫外固定点　34
（軸性）ウォード・高橋恒等式　136
軸性ベクトル・カレント　77
次元正則化の $\overline{MS}$ 処方　232
自己エネルギー　238
自己相関　218, 220
自己相関時間　220
指数定理　156
指数定理の証明　161
ジャック・ナイフ法　217
自由エネルギー　66
周期的境界条件　208

収束半径 69
周辺則 54
重要でない (irrelevant) パラメタ 41
詳細釣り合い 181, 182
乗法的 239

随伴表現 257
スカラー 98
スカラー場の理論の連続極限 38
スケーリング則 68
スタッガード (staggard)・フェルミオン 85

静的ポテンシャル 52
正 (positive) の状態 180
赤外固定点 33
赤外発散 233
積分された自己相関時間 220
積分の台形公式 11
ゼロ固有値 129
ゼロモード解 131
遷移確率 179
漸近的自由性 68
線型増加なポテンシャル 54

相関距離 16
相関を取り入れた誤差評価 218
相関を取り入れたフィット 219

■タ行
大域的 Z_N 56
ダブラー 72, 76
ダブリング問題 72, 74

秩序変数 20, 54, 56, 57, 118
中間子の伝搬関数 98
中間的な (marginal) パラメタ 41

低エネルギーでのダブラーの分離 79
ディラック・フェルミオン 87
ディリクレ型の境界条件 127, 129
停留点 105
転送行列 289
テンソル 98

統計誤差 217
特異点 69
ドメインウォール・フェルミオン 122, 123
ドメインウォール・フェルミオン作用 152
ドメインウォール・フェルミオンの伝搬関数 135, 277
ドメインウォール QCD 134
トレロン質量 57

■ナ行
南部・ゴールドストーン粒子 81

ニールセン・二宮の定理 73
2 階差分 13
2 次元の非可換ゲージ理論 64

ネーター (Noether) の定理 77
熱浴（ヒート・バス）法 173

■ハ行
パイ中間子の質量の計算 108
パイ中間子の崩壊定数 83, 231
ハイブリッド・モンテカルロ (Hybrid Monte Carlo, HMC) 法 184
ハウスドルフの公式 48
パウリ・ビラース差引法 142
パウリ・ビラース場 142
裸の結合定数 240
ハドロン 167
ハドロン演算子の改良 213
ハドロンの伝搬関数 205
バリオンの伝搬関数 207
パリティ 107
パリティ・フレーバー対称性の自発的破れ 111, 113
パリティ対称性 107
パリティ対称性の自発的破れ 274
「パリティ」変換 152

非周期的 180

ファイマン規則 94, 236
フィット（最適化） 214, 219
フェルミオン作用 71
物理的粒子とダブラーとの相殺 157
普遍性 41
プラケット作用 48
フレーバー 81
ブロックスピン 27
ブロックスピン変換 27
分子動力学 184

平均値 217
平均場改良 241

ベータ関数　67
ベクター　98
ベクター・ゲージ理論　126
ベクトル変換　138

ポアンカレ・ホップ（Poincare-Hopf）の定理　74
崩壊定数の計算　231
ホッピング・パラメタ展開　94
ポリャコフ・ループ　55, 95

■マ行
前処理　201
マルコフ過程　179
マルコフ鎖　179

メソンの分散関係　110
メトロポリス・テスト　185, 190
メトロポリス法　179
面積則　53

モンテカルロ法　181

■ヤ行
ヤコビアン　146

有限体積効果　22
有効作用　104
有効質量　212
有効ポテンシャル　102, 105

4 次元完全反対称テンソル　265
4 次元 $\lambda\phi^4$ 理論の自明性　39
4 体フェルミ相互作用　271

■ラ行
ラムダ・パラメタ　67

リープフロッグ　184
臨界クォーク質量　116
臨界 (クリティカル)・ホッピング・パラメタ　100
臨界指数　20, 112
リンク変数　46

励起状態　211
連続極限への外挿　224

【著者】
青木　慎也（あおき　しんや）
1987年3月　東京大学理学系大学院(物理学専攻)博士課程修了(理学博士)
1987年4月－1989年9月　日本学術振興会特別研究員（東京大学理学部）
1987年9月－1989年8月　米国ブルックヘブン国立研究所博士研究員
1989年9月－1991年8月　米国ニューヨーク州立大学ストーニーブルック校 博士研究員
1991年8月－1993年7月　筑波大学物理学系助手
1993年7月－1994年1月　同 講師
1994年1月－2001年3月　同 助教授
2001年4月－　同 教授
現在　筑波大学数理物質科学研究科物理学専攻教授
専門　素粒子理論（格子ゲージ理論，格子上のフェルミオン）
著書　『格子上のカイラルフェルミオン』（現代物理学最前線7：共立出版）

【シュプリンガー現代理論物理学シリーズ編者】
稲見　武夫（いなみ　たけお）
中央大学理工学部物理学科教授

川上　則雄（かわかみ　のりお）
大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻教授

シュプリンガー現代理論物理学シリーズ　第3巻
格子上の場の理論

平成24年1月20日　発　　行
平成24年4月10日　第2刷発行

著　者　青　木　慎　也

編　集　シュプリンガー・ジャパン株式会社

発行者　池　田　和　博

発行所　丸善出版株式会社
〒101-0051　東京都千代田区神田神保町二丁目17番
編集：電話(03)3512-3263／FAX(03)3512-3272
営業：電話(03)3512-5256／FAX(03)3512-3270
http://pub.maruzen.co.jp/

印刷・日経印刷株式会社／製本・株式会社 松岳社

ISBN 978-4-621-06193-0　C3042　　Printed in Japan

本書は，2005年10月にシュプリンガー・ジャパン株式会社より出版された同名書籍を再出版したものです。